

**Introducción**

[Estándares K-12 de Luisiana para estudiantes de matemáticas:](#) ..... 2

[Función de los estándares en el desarrollo de destrezas fundamentales de los/as estudiantes y competencia en matemáticas](#) ..... 2

[Organización de los estándares](#) ..... 3

**Estándares de Luisiana para estudiantes de matemáticas**

[Estándares para la práctica de matemáticas](#) ..... 4

**Estándares por grado para el contenido de matemáticas**

[Jardín infantil](#) ..... 8

[1<sup>er</sup> Grado](#) ..... 11

[2<sup>o</sup> Grado](#) ..... 15

[3<sup>er</sup> Grado](#) ..... 18

[4<sup>o</sup> Grado](#) ..... 23

[5<sup>o</sup> Grado](#) ..... 28

[6<sup>o</sup> Grado](#) ..... 33

[7<sup>o</sup> Grado](#) ..... 38

[8<sup>o</sup> Grado](#) ..... 43

[Álgebra I](#) ..... 48

[Geometría](#) ..... 53

[Álgebra II](#) ..... 58

[Glossario y tablas](#) ..... 63

## Introducción

### Desarrollo de los estándares K-12 de Luisiana para los/as estudiantes de matemáticas

Los estándares del estado de Luisiana para los cursos de matemáticas fueron desarrollados por más de cien docentes de este estado, con la contribución de miles de padres de familia y profesores residentes en todo el estado. Los/as docentes concibieron el contenido del estudio de matemáticas que los/as estudiantes bien preparados deben cubrir, además de la práctica que deben adquirir para ser competitivos en nuestra sociedad, por lo que concentraron sus esfuerzos en el desarrollo de estándares que les permita alcanzar ese propósito. Los nuevos estándares entregan el contenido adecuado para todos los grados o cursos, son muy ambiciosos y facilitan una continuidad lógica de contenido a través de todos los grados, e internamente en cada uno de ellos.

### La contribución de los estándares para el desarrollo de destrezas fundamentales de los/as estudiantes, y su competencia en matemáticas

Los/as estudiantes del estado de Luisiana estarán preparados/as para su ingreso al colegio o para continuar sus estudios profesionales, siempre que sean capaces de satisfacer las expectativas académicas y de trabajo sin necesidad de cursos complementarios, para adquirir destreza y conocimiento en matemáticas. Los estándares definen los temas que los/as estudiantes del estado de Luisiana deben conocer, comprender y la práctica que deben adquirir en matemáticas, además de señalar los pasos que los/as estudiantes deben seguir para poder alcanzar este objetivo.

Por ejemplo, todos los/as estudiantes deben tener la capacidad de recordar y aplicar diariamente sus destrezas y aprendizaje en matemáticas. Esto quiere decir que deben manejar con soltura determinadas realidades y conceptos matemáticos como sumar, restar, multiplicar y dividir magnitudes sencillas, la manera de trabajar con números fraccionarios y porcentajes y además, la forma de aplicar los conocimientos básicos del álgebra y la geometría. Además, los/as estudiantes tienen que interiorizar la lógica matemática, saber expresarse en términos matemáticos tanto de manera oral como escrita y aprender a solucionar problemas que se presenten en la vida real, para estar preparados desde el punto de vista del manejo de los números para la educación superior o la búsqueda de un desempeño profesional.

Los estándares K-12 para las matemáticas determinan fundamentos que permiten que los/as estudiantes sean competentes en este campo del conocimiento, enfocándose en la comprensión conceptual, la habilidad y la soltura, en el manejo de procedimientos y de su aplicación práctica.

- La expresión **Comprensión Conceptual** se refiere a la asimilación de los fundamentos, las operaciones y las relaciones matemáticas. Esto va mucho más allá del conocimiento de operaciones y procedimientos aislados. Los/as estudiantes deben ser capaces de entender la razón por la que un concepto matemático es importante, y de interpretar los diferentes escenarios en los que tiene aplicación. Esto los capacita también para enlazar el conocimiento adquirido con las nuevas ideas y conceptos que van aprendiendo.
- El concepto **Destreza y Soltura en el Manejo de los Procedimientos** se refiere a la capacidad de ejecutarlos de forma precisa, eficiente y versátil. Para ello se requiere rapidez y precisión en el cálculo, al tiempo que ofrece a los/as estudiantes oportunidades de practicar sus destrezas básicas. La comprensión por su parte de fundamentos y procedimientos más complejos depende de la habilidad y la soltura que adquieran.
- La **Práctica** facilita un importante entorno para el aprendizaje, además de la oportunidad para solucionar problemas de una forma coherente y eficaz. Solamente a través de la aplicación de conceptos en situaciones reales, es que los/as estudiantes aprenden a seleccionar un método eficiente para encontrar una solución y determinar si ésta es correcta, mediante el razonamiento y el desarrollo de competencias en el discurrir del pensamiento crítico.

### Organización de los estándares

En el estado de Luisiana tenemos dos tipos de criterios para los estándares de las matemáticas: el que se refiere a la práctica y, el que cubre el contenido del aprendizaje de las matemáticas. A continuación presentamos un resumen de cada clasificación:

1. Estándares para la práctica de las matemáticas.
  - Aplica para todos los grados programáticos.
  - Describe a los estudiantes competentes en matemáticas.
2. Estándares para el contenido de las matemáticas.
  - Los estándares K-8 se muestran para cada grado.
  - Los estándares se presentan por cada curso en la preparatoria (álgebra I, geometría y álgebra II), y luego se organizan por categorías conceptuales:
    - Número y cantidad
    - Álgebra
    - Funciones
    - Modelos
    - Geometría
    - Estadística y cálculo de probabilidad

## Matemáticas | Estándares para la práctica de las matemáticas

La implementación de enfoques, prácticas y el reconocimiento consciente de lo aprendido, es condición indispensable para lograr éxito en el aprendizaje y práctica de las matemáticas, a medida que se hace el esfuerzo para desarrollar soltura, habilidad procedimental y comprensión de sus fundamentos. Los estándares para la práctica matemática describen la variedad de conocimientos que los educadores en esta ciencia y para todos los grados, deben empeñarse en desarrollar en sus estudiantes. Estas prácticas se fundamentan en importantes "procesos y competencias", de tradicional significado en la educación de la ciencia matemática.

Los Estándares para la Práctica de las Matemáticas se desarrollan generalmente a medida que los/as estudiantes resuelven tareas de alta exigencia que consolidan enfoques, prácticas y reconocimiento consciente de lo aprendido, que es el objetivo de estos estándares.

A continuación se relacionan los 8 estándares seleccionados para la práctica de las matemáticas, así como sus descripciones.

### 1 Asimilar los problemas y empeñarse en su solución.

Los/as estudiantes con buen conocimiento de las matemáticas comienzan por explicarse a sí mismos la esencia de un problema, y la búsqueda de los elementos básicos de su solución. Ellos/as analizan hechos, limitantes, interrelaciones y objetivos. Adelantan hipótesis acerca del fundamento y contenido de la solución y desarrollan un camino hacia ella, en lugar de enfrascarse sin más ni más en la búsqueda de una solución. Analizan problemas con factores semejantes y aplican casos particulares y modelos más sencillos del problema que los ocupa, con el fin de avanzar en la comprensión de la solución. Hacen seguimiento, evalúan su progreso y visualizan cualquier cambio necesario en su planteamiento. Dependiendo de cada caso, los/as estudiantes más avanzados/as podrían transformar expresiones algebraicas o cambiar la presentación de la pantalla gráfica de su calculadora, para obtener la información que necesitan. Los/as estudiantes con buen conocimiento de las matemáticas pueden hallar equivalencias entre ecuaciones, descripciones orales, tablas y gráficos, así como trazar diagramas de características y relaciones más importantes, graficar datos obtenidos y analizar en busca de patrones y tendencias. Para conceptualizar y resolver problemas, los/as estudiantes más jóvenes podrían recurrir al uso de objetos específicos o gráficas. Los/as estudiantes con buen conocimiento de las matemáticas confrontan sus respuestas con los problemas aplicando diferentes métodos, y se preguntan constantemente a sí mismos, "¿qué sentido tiene?". Ellos/as pueden asimilar los enfoques que otras personas dan para solucionar problemas complejos, e identificar las equivalencias entre las diferentes estrategias.

### 2 Razonar de manera abstracta y cuantitativa.

Los/as estudiantes con buen conocimiento de las matemáticas entienden los números y sus interrelaciones implícitas, en problemas de diferente índole. Los/as estudiantes reúnen dos habilidades complementarias para solucionar problemas que incluyen relaciones cuantitativas: la capacidad de *descontextualizar*, es decir, de abstraer una situación dada y representarla de manera figurada manipulando los símbolos identificados como si fueran independientes, sin atender necesariamente a sus elementos referentes, y la habilidad de *contextualizar*, es decir, de hacer una pausa en cuanto sea necesaria dentro del proceso de manipulación, con el fin de probar con referentes los símbolos considerados. El razonamiento cuantitativo implica capacidad de recreación coherente del problema que se aborda, de considerar las unidades que se manipulan, de comprender el alcance de las magnitudes no simplemente la forma de hacer cálculos con ellas, de conocer y aplicar de manera libre las diferentes propiedades de las operaciones y los objetos.

### 3 Desarrollar argumentos factibles y opinar sobre el razonamiento de los/as demás.

Los/as estudiantes con buen conocimiento de las matemáticas entienden y aplican las hipótesis planteadas, las definiciones y, los resultados previstos durante el desarrollo de la argumentación. Suponen eventos y desarrollan una progresión lógica de proposiciones matemáticas, para comprobar la veracidad de sus presunciones. Tienen la

capacidad de analizar diferentes situaciones asimilándolas para casos diferentes, al tiempo que pueden reconocer y utilizar ejemplos que demuestren la falsedad de una teoría. Ellos/as fundamentan sus conclusiones, las analizan conjuntamente y responden a los argumentos de otras personas. Aplican razonamiento inductivo a la información que poseen, para generar argumentos admisibles que consideren el contexto dentro del cual se obtuvieron los datos. Los/as estudiantes competentes también tienen la capacidad de comparar la efectividad de dos argumentos posibles, de distinguir la lógica correcta o el razonamiento equivocado al que conducen y, si existe imperfección en un argumento, de explicar su razón de ser. Los/as estudiantes de primaria pueden desarrollar argumentos recurriendo a referentes concretos tales como objetos específicos, dibujos, diagramas y actividades. Tales argumentos pueden tener sentido y ser correctos, aun cuando no se puedan generalizar ni aceptar formalmente hasta que se llega a grados superiores. Posteriormente, los/as estudiantes aprenden a determinar dominios al que un argumento afecta. Los/as estudiantes en todos los grados pueden escuchar o leer los argumentos de los/as demás, decidir si tienen sentido y, hacer preguntas útiles para el esclarecimiento o el mejoramiento de una argumentación.

#### **4 Utilizar modelos matemáticos.**

Los/as estudiantes competentes pueden aplicar el conocimiento matemático que poseen para resolver problemas que se presentan en la vida cotidiana, en los eventos sociales y en los lugares de trabajo. En los grados más elementales esto podría ser comparativamente tan simple, como escribir una operación de adición para representar una situación dada. En los grados intermedios un/a estudiante podría aplicar la razón de proporcionalidad, para planear un evento escolar o analizar un problema en la comunidad. En la preparatoria, un/a estudiante podría aplicar sus conocimientos de geometría para solucionar un problema de diseño o, utilizar una función para describir la forma como un determinado interés depende de otro factor. Los/as estudiantes competentes en matemáticas que pueden aplicar los conocimientos adquiridos, se sienten cómodos/as elaborando teorías y haciendo estimaciones para simplificar una situación complicada, con el convencimiento de que ésta puede requerir revisión posterior. Ellos/as son capaces de identificar valores significativos en una situación práctica, y esquematizar sus relaciones utilizando herramientas como diagramas, tablas de dos vías, gráficos, flujogramas y fórmulas. Pueden analizar también esas relaciones matemáticas para derivar sus conclusiones. Acostumbran interpretar sus resultados matemáticos dentro del contexto de una situación particular y reflexionan si los resultados son consistentes, quizás mejorando el modelo si es que este no ha servido para sus propósitos.

#### **5 Utilizar las herramientas de manera selectiva.**

Cuando se encuentran resolviendo un problema en este campo de las ciencias, los/as estudiantes competentes en matemáticas analizan las herramientas disponibles. Estas herramientas incluyen lápiz y papel, modelos específicos, regla, transportador, calculadora, hojas de cálculo, un sistema algebraico por computador, un paquete estadístico o un software dinámico de geometría. Ellos/as están suficientemente familiarizados/as con las herramientas correspondientes a su grado o curso académico, como para decidir de manera apropiada el momento en que cada una de estas herramientas puede ser de utilidad, admitiendo tanto el grado de comprensión que se puede lograr con ellas como sus limitaciones. Por ejemplo, los/as estudiantes de preparatoria con buen conocimiento de matemáticas, analizan las gráficas de las funciones y las soluciones obtenidas con el uso de una calculadora gráfica. Ellos/as detectan posibles errores utilizando de manera cuidadosa los conceptos de aproximación entre otros. Cuando elaboran los modelos matemáticos saben que la tecnología puede facilitarles la visualización de los resultados de diversas teorías, explorar consecuencias y confrontar los supuestos con los datos. Estos/as estudiantes competentes de diferentes grados académicos son capaces de identificar importantes recursos matemáticos, como el contenido digital ubicado en un sitio web, y utilizarlos para plantear o solucionar problemas. Ellos/as están en capacidad de utilizar las herramientas tecnológicas, para explorar y profundizar en la comprensión de los conceptos.

**6 Dar máxima importancia a la meticulosidad.**

Los/as estudiantes con buen dominio de las matemáticas buscan comunicarse de una manera precisa con las demás personas. Ellos/as utilizan definiciones claras cuando se encuentran analizando algún tema con otras personas, y lo mismo hacen con su propio proceso de razonamiento. Así mismo explican el significado de los símbolos que elijen, incluyendo el uso del signo "igual" de manera coherente y conveniente. Son cuidadosos/as en la especificación de las unidades de medida que utilizan y en la determinación de la nomenclatura de los ejes coordenados, para dar claridad a la correspondencia con los valores considerados en un problema. Ellos/as hacen cálculos de manera precisa y eficiente, y dan respuestas numéricas con un grado de precisión adecuado para el contexto del problema. En los grados académicos de primaria los/as estudiantes se dan entre sí explicaciones planteadas con mucho detenimiento. En el momento en que llegan a la preparatoria, ya han aprendido a examinar postulados y hacer uso inequívoco de las definiciones.

**7 Buscar y aprovechar las estructuras.**

Los/as estudiantes con buen dominio de las matemáticas revisan cuidadosamente los ejercicios, a fin de identificar modelos o relaciones específicas. Los/as estudiantes principiantes, por ejemplo, podrían advertir que tres más siete da el mismo resultado que siete más tres, o podrían ordenar una serie de figuras de acuerdo a la cantidad de lados que ellas tengan. Posteriormente cuando estén estudiando la propiedad distributiva de la multiplicación, ellos/as aprenderán que  $7 \times 8$  es igual a la consabida operación  $7 \times 5 + 7 \times 3$ . En la expresión matemática  $x^2 + 9x + 14$ , los/as estudiantes más avanzados/as identificarán inmediatamente que el número 14 da como resultado de multiplicar  $2 \times 7$  y, que el número 9 es el resultado de sumar  $2 + 7$ . Ellos/as reconocen la importancia de una recta cualquiera en una figura geométrica, y pueden recurrir al método de trazar una recta auxiliar para la solución de problemas. También tienen la capacidad de revisar un proceso, para tener una visión general de un problema y posibilitar un cambio de perspectiva si es necesario. Pueden inclusive percibir situaciones complejas, p. ej. , algunas expresiones algebraicas, como elementos únicos o integrados por varios factores. Por ejemplo, la operación  $5 - 3(x - y)^2$  la pueden percibir como 5 menos un número positivo multiplicado por un valor elevado al cuadrado y utilizar esta observación, para deducir que para cualesquier combinaciones de números reales que tomen  $x$  y  $y$ , el valor resultante no puede ser mayor a 5.

**8 Buscar y expresar la periodicidad en razonamientos recurrentes.**

Los/as estudiantes más sobresalientes en matemáticas se dan cuenta si los cálculos se repiten, y buscan tanto los procedimientos generales como las fórmulas cortas. Los/as estudiantes de los últimos cursos de primaria pueden darse cuenta que cuando dividen 25 entre 11, el resultado repite una y otra vez un valor numérico y que por lo tanto, se encuentran ante un valor decimal que se repite. Al momento de calcular el valor de la pendiente, después de que los/as estudiantes comprueben una y otra vez si los puntos dados se ubican en la recta que pasa a través de (1, 2) con pendiente 3, los/as estudiantes de nivel medio podrían deducir aquí la aplicación de la ecuación  $(y - 2)/(x - 1) = 3$ . La determinación de la uniformidad con que los términos se cancelan durante el desarrollo de las operaciones  $(x - 1)(x + 1)$ ,  $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ , y  $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$ , podría llevarlos a la conclusión de la fórmula general para la sumatoria de una progresión geométrica. A medida que avanzan en la resolución de problemas, los/as estudiantes con buen conocimiento de matemáticas advierten el desarrollo general de una operación, al tiempo que prestan atención a sus detalles. Continuamente están evaluando la argumentación de los resultados intermedios obtenidos.

**Relación de los estándares para la práctica de las matemáticas, con los que aplican para su contenido.**

Los estándares para la práctica de las matemáticas describen las diferentes formas en que los/as estudiantes en formación en esta ciencia, deben ajustarse progresivamente al tema a medida que adquieren madurez y conocimientos a través de los años dedicados a su estudio en primaria, secundaria y preparatoria.

Los estándares que aplican para el contenido que debe incluir el estudio de las matemáticas, son el resultado de una combinación correcta de procedimientos y de interpretación. Las iniciativas que comienzan con la palabra

"interpretación", con frecuencia implican excelentes oportunidades para relacionar la práctica con el contenido. Los/as estudiantes que no poseen la dimensión de la interpretación de un tema dado, pueden depender demasiado de los procedimientos. En ausencia de múltiples fundamentos sobre los cuales trabajar, estos/as estudiantes probablemente tendrán menores posibilidades de relacionar problemas similares, plantear los problemas de manera coherente, verificar sus conclusiones, proyectar los principios matemáticos a situaciones prácticas, aplicar la tecnología correctamente para trabajar con las matemáticas, explicar de manera precisa a las demás personas los conceptos matemáticos, detenerse en el camino para realizar una comprobación o, experimentar alternativas más prácticas a partir de procedimientos aprendidos. En resumen, la falta de una adecuada interpretación impide que los estudiantes se acoplen a las prácticas matemáticas.

En este sentido, los mencionados estándares contextuales concebidos para la interpretación de las matemáticas, constituyen posibles "puntos de coincidencia" entre los *Estándares para el Contenido de las Matemáticas* y los *Estándares para la Práctica de las Matemáticas*. Estos puntos de coincidencia se han concebido para examinar con detenimiento los conceptos fundamentales y productivos del programa educativo de matemáticas, que demandan el tiempo, los recursos, las energías constructivas y el enfoque, necesarios para mejorar la calidad de los programas, los métodos de enseñanza y evaluación, el desarrollo profesional y los resultados de los estudiantes de matemáticas.



## Matemáticas | Jardín infantil

A este nivel, la enseñanza debe concentrarse en el cubrimiento de dos áreas fundamentales: (1) La representación, interrelación y operación de los números enteros, comenzando con conjuntos de objetos específicos; (2) la descripción de las figuras y del espacio. La educación en el jardín infantil debe dedicar más tiempo a los números que a cualesquier otros temas.

(1) Los/as estudiantes utilizan los números, incluyendo su escritura, para representar magnitudes y resolver problemas como el recuento de objetos presentes en un conjunto, el de un número determinado de objetos, la comparación de conjuntos o cifras y la representación de eventos sencillos de unión o diferenciación de conjuntos de elementos o, de manera circunstancial con ecuaciones como  $5 + 2 = 7$  y  $7 - 2 = 5$ . (Los/as estudiantes de jardín infantil deben aprender los métodos de suma y resta, pero su escritura a este nivel aunque se recomienda, no es un requisito). Los/as estudiantes deben saber escoger, combinar y manejar métodos eficaces para responder preguntas de tipo cuantitativo, incluyendo un rápido reconocimiento de los números cardinales en pequeños conjuntos de elementos, el recuento y desarrollo de conjuntos de determinados tamaños o, el recuento de la cantidad de elementos que quedan en un conjunto después de haber eliminado algunos de ellos.

(2) Los/as estudiantes deben saber describir su entorno físico, utilizando conceptos geométricos (p. ej. , forma, dirección y relaciones espaciales) y la terminología adecuada. Deben saber identificar, denominar y describir figuras sencillas bidimensionales como cuadrados, triángulos, círculos, rectángulos y hexágonos, representados en diferentes figuras (p. ej. , con tamaños y orientación diferentes), así como también figuras tridimensionales del tipo cubos, conos, cilindros y esferas. Ellos/as utilizan figuras y razonamiento abstracto elementales para representar objetos de su entorno y desarrollar figuras más complejas.

## Enumeración y cardinalidad

## K. CC

### A. Reconozcan los nombres de los números y su secuencia.

1. Recuento hasta 100 por unidades simples y por decenas.
2. Conteo regresivo a partir de un número determinado, dentro de una secuencia conocida (en lugar de comenzar por 1).
3. Escritura de los números de 0 hasta 20. Representar cierta cantidad de elementos con números de 0 a 20 (considerando el valor 0 como recuento de ningún elemento).

### B. Recuento numérico para identificar cantidad de objetos específicos.

4. Los/as estudiantes deben comprender las relaciones existentes entre los números y las magnitudes que representan; es decir, la correspondencia entre la enumeración y la cuantía implícita.
  - a. Cuando se hace un recuento de elementos en orden ascendente, deben saber decir los nombres de los números a medida que los relacionan con cada objeto específico dentro de un conjunto, señalando la correspondencia entre las unidades.
  - b. Deben comprender que el último número que mencionan, corresponde al número total de elementos contados. El número de objetos específicos es el mismo, sin tener en cuenta su distribución o el orden en que hayan sido contados.
  - c. Deben comprender que cada número consecutivo en la secuencia, se relaciona con el anterior en una cantidad unitaria mayor.
5. Cuenten de tal forma que puedan responder a la pregunta, "¿Qué cantidad?"
  - a. Cuenten hasta 20 los objetos específicos dispuestos linealmente, en secuencia rectangular o en círculo.
  - b. Cuenten hasta 10 los elementos dispuestos de manera dispersa.
  - c. Cuando se dé un número entre 1 y 20, cuenten cuántos objetos específicos se tiene.



**C. Relacionen cantidades.**

6. Determinen si la cantidad de objetos específicos que integran un conjunto es igual, mayor o menor, que la cantidad de objetos en otro conjunto, utilizando por ejemplo métodos de recuento.<sup>1</sup>
7. Comparen dos números entre 1 y 10 escritos como dígitos.

**Operaciones y razonamiento algebraico**

**K. OA**

**A. Entiendan la adición como la acción de unir y agregar, y la sustracción como el proceso de separar o disminuir.**

1. Representen la adición y la sustracción con objetos específicos, con los dedos, con estímulos a imágenes mentales, dibujos<sup>2</sup>, sonidos (p. ej. , palmadas), representación de situaciones, explicaciones orales, expresiones o ecuaciones.
2. Resuelvan problemas con enunciado verbal en operaciones de adición y sustracción que consideren números menores de 10, por ejemplo utilizando objetos específicos o dibujos para plantear los problemas.
3. Descompongan de diferentes maneras en parejas de números, magnitudes iguales o menores a 10 utilizando por ejemplo objetos o dibujos, y representen cada ejercicio mediante una ilustración o ecuación (p. ej. ,  $5 = 2 + 3$ , y,  $5 = 4 + 1$ )
4. Para cualquier cantidad dada entre 1 y 9, encuentren el número que suma 10 cuando se añade a un número conocido, usando por ejemplo objetos o dibujos, y escriban la respuesta mediante una ilustración o ecuación.
5. Sumen y resten con soltura elementos dentro del rango de 5 unidades.

**Números y operaciones en el Sistema Decimal**

**K. NBT**

**A. Trabajen con números entre 11 y 19, para aprender los fundamentos del concepto de valor posicional.**

1. Aprendan el concepto de valor posicional.
  - a. Comprendan que los números de 11 a 19 están formados por una decena, a la que se adiciona una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho o nueve unidades.
  - b. Compongan y descompongan números de 11 a 19 aplicando el concepto de valor posicional (utilizando por ejemplo objetos específicos o figuras).
  - c. Escriban cada ejercicio de composición o descomposición utilizando una ilustración o una ecuación (p. ej. , 18 es igual a una decena más ocho unidades;  $18 = 1 \text{ decena} + 8 \text{ unidades}$ ;  $18 = 10 + 8$ ).

**Medición y datos**

**K. MD**

**A. Expliquen y comparen atributos cuantificables.**

1. Describan atributos cuantificables de objetos específicos, como su longitud o su peso. Mencionen algunos atributos cuantificables de un solo objeto específico.
2. Comparen dos objetos que tengan un atributo cuantificable en común, para ver cuál de ellos tiene más o menos de ese atributo y expliquen la diferencia. Por ejemplo, comparen la talla de dos niños y determinen a *uno de ellos como más alto o más bajo*.

**B. Clasifiquen objetos específicos y hagan un recuento de la cantidad de ellos que hay en cada categoría.**

3. Con base en sus atributos clasifiquen objetos específicos en diversas categorías; cuenten la cantidad de objetos en cada categoría y ordenen estas últimas de acuerdo a la cantidad incluida.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Consideren conjuntos hasta de 10 objetos específicos.

<sup>2</sup>No es necesario que los dibujos sean muy detallados, pero deben reflejar el aspecto matemático presente en el problema. (Esto aplica siempre que los dibujos estén considerados dentro de los estándares).

<sup>3</sup>El límite de cantidad por cada categoría debe ser igual o menor a 10.

**C. Ejercicios con dinero.**

4. Aprendan a reconocer la diferencia en nombre y valor del centavo ó penique (pennie), el níquel (nickel), el sencillo (dime) y la peseta (p. ej. , este es un níquel y equivale a 5 centavos).

**Geometría**

**K. G**

**A. Identifiquen y describan las figuras geométricas (cuadrados, círculos, triángulos, rectángulos, hexágonos, cubos, conos, cilindros y esferas).**

1. Describan los objetos que encuentran a su alrededor utilizando los nombres de sus formas, y mencionen la posición relativa que ocupan recurriendo a referencias como *arriba, abajo, al lado, en frente de, detrás y cerca de*.
2. Den a cada forma su nombre correcto sin tener en cuenta su orientación o tamaño absoluto.
3. Clasifiquen las formas en dos tipos: bidimensional (ajustada al plano o "llana") ó, tridimensional ("sólida")

**B. Analicen, comparen, construyan y organicen diferentes figuras.**

4. Analicen y comparen figuras bidimensionales y tridimensionales con diferentes formas y orientaciones, utilizando expresiones sencillas para describir sus semejanzas, diferencias y partes de su estructura (p. ej. , número de lados y vértices ó "esquinas") además de otras propiedades (p. ej. , presencia de lados semejantes).
5. Hagan modelos de figuras comunes en el entorno, construyéndolos con elementos (p. ej. , palitos y bolas de arcilla) y a partir de dibujos.
6. Elaboren figuras complejas a partir de formas sencillas. *Por ejemplo, "¿pueden ustedes unir estos dos triángulos por sus lados completos de tal forma que se obtenga un rectángulo?"*.

## Matemáticas | 1<sup>er</sup> Grado

En el 1<sup>er</sup> grado, la enseñanza debe concentrarse en el cubrimiento de cuatro áreas fundamentales: (1) comprensión de operaciones de adición, sustracción y métodos para la adición y sustracción de números menores de 20; (2) comprensión de las relaciones entre números enteros y del concepto de valor posicional, incluyendo la escritura matemática de decenas más unidades; (3) comprensión de los conceptos de medición lineal y de medidas de longitud, consideradas como unidades iterativas para lograr secuencias de igual longitud; y, (4) consideración de las propiedades de las figuras geométricas, así como su composición y descomposición.

(1) Los/as estudiantes desarrollan la metodología para suma y resta con números enteros, a partir de su trabajo previo con valores pequeños. Ellos/as utilizan una variedad de modelos que incluyen elementos discretos y modelos que ilustran el concepto de longitud (p. ej. , cubos unidos para formar secuencias con unidades de igual longitud), con el fin de aclarar la forma de adicionar, reducir, juntar, separar y analizar los eventos, explicando así el significado de los métodos de adición y sustracción y además, de desarrollar con estas operaciones procedimientos para la solución de problemas aritméticos. Los/as estudiantes deben comprender las relaciones entre los métodos de conteo, y las de sumar y restar (p. ej. , sumar dos unidades es lo mismo que contar de dos en dos). Ellos/as aplican las propiedades de la adición para sumar números enteros y, para desarrollar y aplicar métodos más complejos con base en estas propiedades (p. ej. , "trabajar con decenas"), que les permita solucionar problemas de adición y sustracción con números menores de 20. A través del estudio de diferentes métodos, los niños/as comienzan a entender la relación entre la adición y la sustracción.

(2) Los/as estudiantes desarrollan, analizan, aplican y generalizan, métodos eficientes y exactos para sumar números hasta 100 y restar múltiplos de 10. Ellos/as analizan números enteros (por lo menos hasta 100) para poder comprender y resolver problemas relacionados con sus tamaños individuales. Consideran los números enteros entre 10 y 100 como magnitudes formadas por decenas y unidades sencillas (reconociendo particularmente los números 11 hasta 19 como integrados por una decena y varias unidades). A través de actividades que desarrollan su sentido de identificación del número, ellos/as asimilan el orden de los mismos en una secuencia de conteo y sus magnitudes relativas.

(3) Los/as estudiantes empiezan a comprender el significado y los procesos implícitos en el cálculo de las medidas, incluyendo conceptos que le son propios como la repetición o condición iterativa (entendida como el proceso mental de desarrollar la extensión de un elemento, adicionando unidades de igual tamaño) y la propiedad de transitividad en la medición indirecta.<sup>1</sup>

(4) Deben saber componer y descomponer un plano o figuras geométricas con volumen (p. ej. , colocar dos triángulos juntos para obtener un cuadrilátero) y comenzar a entender las relaciones de la parte con el todo, además de las propiedades de las figuras simples y compuestas. A medida que avanzan en la combinación de figuras se capacitan para reconocerlas desde diferentes perspectivas y direcciones, para describir sus propiedades geométricas y determinar sus similitudes y diferencias, para desarrollar los principios de medición y para la comprensión inicial de propiedades tales como congruencia y simetría.

## Operaciones y razonamiento algebraico

## 1. OA

### A. Representen y resuelvan problemas de adición y sustracción.

1. Practiquen la adición y la sustracción con números menores de 20 para solucionar problemas con enunciado verbal que incluyan adición, disminución, unión, separación y comparación, con elementos desconocidos colocados en todas las posiciones relativas posibles (p. ej. , utilizando motivos, dibujos y ecuaciones que indiquen con un signo de interrogación el número desconocido para plantear el problema).<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Deben saber aplicar el principio de transitividad de medidas para realizar comparaciones indirectas, pero no es necesario que conozcan este término técnico.

<sup>2</sup> Consulten la tabla 1 del glosario.

- Solucionen problemas con enunciado verbal que consideren la adición de tres números enteros cuya sumatoria sea igual o menor a 20; p. ej. , utilizando motivos, dibujos y ecuaciones para plantear el problema, en las que se reemplace con un signo de interrogación el valor desconocido).

**B. Comprendan y pongan en práctica las propiedades de las operaciones y las relaciones entre la adición y la sustracción.**

- Pongan en práctica las propiedades de las operaciones para sumar y restar. <sup>3</sup>Ejemplos: Si  $8 + 3 = 11$ , entonces  $3 + 8 = 11$ . (Propiedad conmutativa de la adición). En la sumatoria de  $2 + 6 + 4$ , los dos últimos números pueden ser sumados ente sí para obtener un valor igual a diez y tendremos que,  $2 + 6 + 4 = 2 + 10 = 12$ . (Propiedad asociativa de la adición).
- Comprendan la operación de sustracción en un problema que incluya sumandos desconocidos. Por ejemplo, desarrollen la operación  $10 - 8$  buscando el número que dé 10 cuando se sume a 8.

**C. Sumen y resten con números menores de 20.**

- Relacionen la acción de contar con las operaciones de adición y sustracción (p. ej. , contando de 2 en 2).
- Sumen y resten con números menores de 20, para demostrar soltura con las operaciones de adición y sustracción de números menores de 10. Apliquen mentalmente métodos como el de conteo a partir de un número dado para lograr obtener 10 ( $8 + 6 = 8 + 2 + 4 = 10 + 4 = 14$ ); descomposición de un número hasta lograr un valor igual a 10 (p. ej. ,  $13 - 4 = 13 - 3 - 1 = 10 - 1 = 9$ ); recurrir a las relaciones entre la adición y la sustracción (p. ej. , sabiendo que  $8 + 4 = 12$ , deducimos que  $12 - 8 = 4$ ) y, desarrollar una sumatoria equivalente pero más sencilla o conocida (p. ej. , sumar  $6 + 7$  desarrollando la equivalencia más sencilla  $6 + 6 + 1 = 12 + 1 = 13$ ).

**D. Trabajen con ecuaciones que impliquen adición y sustracción.**

- Comprendan la implicación del signo "igual" y, determinen si las ecuaciones que implican adición y sustracción son verdaderas o falsas. Por ejemplo, ¿cuáles de las siguientes ecuaciones son verdaderas o falsas?  $6 = 6$ ,  $7 = 8 - 1$ ,  $5 + 2 = 2 + 5$ ,  $4 + 1 = 5 + 2$ .
- Determinen el número entero desconocido en una ecuación que implique adición o sustracción de tres números enteros. Por ejemplo, ¿pueden determinar el número desconocido que hace verdadera la ecuación en cada uno de los casos  $8 + ? = 11$ ,  $5 = \square - 3$ ,  $6 + 6 = \square$ .

**Números y operaciones en el Sistema Decimal**

**1. NBT**

**A. Amplíen la secuencia del conteo.**

- Cuenten hasta 120, comenzando a partir de cualquier número menor que él. Lean y escriban los números dentro de esta serie y, relacionen una cantidad de objetos que corresponda a cada uno de los números escritos.

**B. Comprendan el concepto de valor posicional.**

- Aprendan que los dos dígitos de un número compuesto por dos de ellos representan un valor en decenas, más algún valor unitario. Entiendan como casos especiales los que siguen a continuación:
  - El número 10 se puede ver como un grupo de diez unidades, que llamamos una "decena".
  - Los números 11 a 19 están formados por una decena, a la que se adiciona una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho o nueve unidades.
  - Los números 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 y 90 se conocen como una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve decenas (sin unidades simples).
- A partir del concepto de decenas y unidades, obtengan las relaciones posibles entre dos números compuestos por dos dígitos, representando los resultados con los símbolos matemáticos  $>$ ,  $=$ ,  $<$ .

<sup>3</sup> No es necesario que los/as estudiantes aprendan los nombres técnicos de estas propiedades.

**C. Apliquen en operaciones de suma y resta, el conocimiento del valor posicional junto con el de las propiedades de las operaciones.**

4. Desarrollen sumas con números menores de 100, adicionando magnitudes formadas por dos dígitos y por una sola unidad, además de valores con dos dígitos y múltiplos de 10.
  - a. Recurran a modelos específicos o dibujos y métodos que apliquen los conceptos de valor posicional, de las propiedades de las operaciones y/o de la relación entre la adición y la sustracción; relacionen el método aplicado con una oración numérica y demuestren el razonamiento seguido aplicándolo en una relación escrita.
  - b. Entiendan que al sumar números compuestos por dos dígitos, las decenas se suman a las decenas y las unidades a las unidades. En ocasiones es necesario integrar una decena.
5. Dado un número cualquiera de dos dígitos, calculen mentalmente magnitudes mayores o menores en 10 unidades al número conocido, sin necesidad de contar. Expliquen el método de deducción seguido.
6. Resten múltiplos de 10 en el rango de 10 a 90 a partir de múltiplos de 10 en el mismo rango (las respuestas deben ser iguales a números positivos o a cero), aplicando modelos específicos o dibujos y métodos que utilicen el valor posicional, las propiedades de las operaciones y/o la relación entre la adición y la sustracción. Expliquen de manera escrita el método seguido y sustenten el razonamiento considerado.

**Medición y datos**

**1. MD**

**A. Determinen medidas de longitud de manera indirecta y además, mediante la repetición de unidades de longitud de igual tamaño.**

1. Organicen tres objetos de acuerdo con su longitud y, relacionen de manera indirecta las medidas de longitud de dos de ellos comparándolas con un tercero.
2. Determinen la extensión de un objeto por medio de un número entero que refleje el total de unidades que la completan, colocando una tras otra varias réplicas de un objeto de menor longitud (la unidad de medida); aquí pueden ver que la medida de longitud total de un elemento es igual al número de unidades de la misma longitud que la componen, sin dejar espacio alguno entre ellas ni superponerlas. *Contemplan solamente casos en los que el objeto que se está midiendo tenga una extensión integrada por un número entero de unidades de longitud, dispuestas sin dejar espacios entre ellas ni superponerlas.*

**B. Expresen y escriban el sistema horario.**

3. Utilizando relojes análogos y digitales expresen y anoten el tiempo en términos de horas y medias horas.

**C. Modelen e interpreten los datos.**

4. Organicen, anoten y caractericen los datos en un sistema de tres categorías; hagan y respondan preguntas que consideren su número total, la cantidad de ellos presente en cada categoría y su diferencia en número entre cada categoría.

**D. Ejercicios con dinero.**

5. Calculen el valor de una serie de monedas, hasta una denominación máxima de 50 centavos. [Centavos o peniques (pennies), níquel (nickel), sencillos (dimes) y pesetas. No consideren combinaciones de diferentes monedas].

## Geometría

## 1. G

### A. Hagan deducciones considerando figuras geométricas y sus propiedades.

1. Establezcan diferencias entre propiedades que definen las figuras geométricas (p. ej. , los triángulos están circunscritos por tres lados), y las que no lo hacen (p. ej. , el color, su posición y tamaño total). Construyan y dibujen figuras que tengan propiedades definitorias.
2. Construyan figuras bidimensionales (rectángulos, cuadrados, trapecios, triángulos, medias circunferencias y cuartos de circunferencia), y tridimensionales (cubos, prismas rectos rectangulares, conos circulares rectos y cilindros circulares rectos), y hagan con ellas una figura compuesta que sirva de punto de partida para nuevas formas.<sup>4</sup>
3. Descompongan círculos y rectángulos en dos y cuatro partes semejantes y describan éstas utilizando las expresiones *mitades*, *cuartos* y *cuadrantes*, y utilicen las frases *mitad de*, *cuarto de* y *cuadrante de*. Refiéranse al todo como dos partes de, ó cuatro partes de él. Por medio de estos ejemplos pueden entender, que la descomposición de elementos en partes semejantes da como resultado secciones aún más pequeñas.

<sup>4</sup> No se requiere que los/as estudiantes aprendan nombres técnicos como "prisma rectangular recto".

## Matemáticas | 2º Grado

En el 2º grado, la enseñanza debe concentrarse en el cubrimiento de cuatro áreas fundamentales: (1) ampliación del conocimiento de la notación en el sistema decimal; (2) desarrollo de agilidad de manejo de las operaciones de adición y sustracción; (3) uso de las unidades estándar de medidas; y, (4) descripción y análisis de las figuras geométricas.

(1) Los/as estudiantes deben profundizar su conocimiento del sistema decimal. Esto incluye aprender a contar unidades de a cinco, decenas, múltiplos de cien y de unidades simples, además de describir las relaciones existentes entre estos números y su comparación. Los/as estudiantes deben aprender los números compuestos de varios dígitos (hasta 1.000) escritos con notación de base 10 (sistema decimal), reconociendo que los dígitos en cada posición representan unidades de mil, centenas, decenas o unidades simples (p. ej., el número 853 es el resultado de sumar 8 centenas, 5 decenas y 3 unidades simples).

(2) Los/as estudiantes deben aplicar sus conocimientos de la adición, para adquirir agilidad en el manejo de la adición y sustracción de magnitudes menores de 100. Deben resolver problemas con números menores de 1.000, aplicando sus conocimientos sobre los métodos existentes para la adición y la sustracción y además, deben desarrollar, analizar y aplicar de manera eficiente, precisa y general, la metodología para desarrollar sumas y diferencias de números enteros con notación de base 10 (sistema decimal), aplicando su comprensión del valor posicional y de las propiedades de las operaciones. Deben saber escoger y aplicar con exactitud la metodología adecuada para cálculos específicos y sus números incluidos, con el fin de desarrollar mentalmente sumas y restas de números que incluyan únicamente decenas ó, solamente centenas.

(3) Los/as estudiantes deben entender el fundamento de las unidades de medida (el centímetro y la pulgada), así como utilizar la regla y otros instrumentos de medición, con la idea de que la medición lineal involucra una repetición de unidades de valor. Deben aprender que entre más pequeña sea la unidad de medida, mayor será la repetición de unidades para cubrir la extensión total de un elemento.

(4) Los/as estudiantes deben saber explicar y analizar las figuras geométricas, mediante la revisión de sus lados y ángulos. Los/as estudiantes deben investigar, describir y explicar, la descomposición y combinación de tales figuras para obtener otras diferentes. Mediante la construcción, dibujo y análisis de figuras bidimensionales y tridimensionales, los/as estudiantes desarrollan los fundamentos necesarios para comprender en grados posteriores los conceptos de área, volumen, congruencia, similitud y simetría.

## Operaciones y razonamiento algebraico

## 2. OA

### A. Representen y resuelvan problemas de adición y sustracción.

1. Practiquen la adición y la sustracción con números menores de 100 para solucionar problemas con enunciado verbal que incluyan adición, disminución, unión, separación y comparación, con elementos desconocidos colocados en todas sus posiciones relativas posibles (p. ej., utilizando motivos, dibujos y ecuaciones, que representen el problema e incluyan un signo de interrogación para reemplazar el valor desconocido).<sup>1</sup>

### B. Sumen y resten con números hasta 20.

2. Aplicando métodos de deducción mental, sumen y resten con soltura números hasta 20. <sup>2</sup> Al término del segundo grado, deben saber de memoria todas las sumas de dos números que contengan un solo dígito.

### C. Trabajen con grupos semejantes de objetos específicos, para asimilar los fundamentos de la multiplicación.

3. Establezcan si un grupo dado de objetos (hasta 20) tiene un número par o impar de elementos, por ejemplo contándolos por parejas o de dos en dos. Escriban una ecuación que dé como resultado un número par, como consecuencia de la adición de dos sumandos iguales.

<sup>1</sup> Consulten la tabla 1 del glosario.

<sup>2</sup> Consulten el estándar 1. OA. 6 para obtener una lista de métodos de deducción mental.



4. Apliquen el método de adición para hallar el número total de elementos ordenados en rectángulos consecutivos, con 5 filas y hasta 5 columnas. Escriban una ecuación que calcule el resultado total como la adición de sumandos iguales.

## Números y operaciones de base diez

## 2. NBT

### A. Comprendan el concepto de valor posicional.

1. Observen que cada uno de los integrantes de un número de tres dígitos representan valores de centenas, decenas y unidades simples. Por ejemplo, la cantidad 706 está formada por 7 centenas, 0 decenas y 6 unidades simples. Entiendan como casos especiales los que siguen a continuación:
  - a. El número 100 se puede ver como un grupo de diez decenas, que llamamos una “centena”.
  - b. Los números 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 y 900 se conocen como una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve centenas (sin decenas ni unidades simples).
2. Cuenten hasta 1. 000, sin hacerlo de 5 en 5, de 10 en 10 (por decenas), ni de 100 en 100 (por centenas).
3. Lean y escriban los números hasta 1. 000 utilizando la notación de base 10 (sistema decimal), los nombres de los números y su forma resuelta.
4. Relacionen dos números compuestos por tres dígitos aplicando el concepto de centenas, decenas y unidades simples, y la notación con los símbolos  $>$ ,  $=$ ,  $<$ , en la representación de los resultados de la comparación.

### B. Apliquen en operaciones de suma y resta, el conocimiento del valor posicional junto con el de las propiedades de las operaciones.

5. Sumen y resten de manera ágil diferentes magnitudes menores de 100, aplicando métodos que incluyan los conceptos de valor posicional, las propiedades operacionales y/o las relaciones entre la adición y la sustracción.
6. Sumen hasta cuatro números formados por dos dígitos, aplicando métodos que consideren el valor posicional y las propiedades de las operaciones.
7. Sumen y resten magnitudes hasta 1. 000 recurriendo a modelos o dibujos específicos que consideren los conceptos de valor posicional, las propiedades de las operaciones y/o la ley entre la adición y la sustracción. Demuestren el razonamiento seguido mediante una expresión escrita. Entiendan que al sumar o restar números compuestos por tres dígitos, lo que hacemos es sumar o restar centenas de centenas, decenas de decenas y unidades simples de unidades simples. En ocasiones es necesario integrar o desintegrar decenas o centenas.
8. Mentalmente sumen 10 ó 100 a un número dado entre 100 y 900, y resten 10 ó 100 de un número dado también entre 100 y 900.
9. Expliquen la razón por la que los métodos existentes para la adición y la sustracción funcionan, a partir de los conceptos de valor posicional y de las propiedades de las operaciones.<sup>3</sup>

## Medición y datos

## 2. MD

### A. Hagan mediciones y calculen longitudes a partir de unidades comunes.

1. Midan la longitud de un objeto seleccionando las ayudas adecuadas como reglas, varas de medir, metros plegables y cintas métricas.
2. Midan dos veces la extensión de un objeto utilizando en cada caso unidades de longitud de diferente sistema, y expliquen la ley existente entre las dos mediciones en relación con el tamaño de la unidad escogida.
3. Midan las longitudes utilizando unidades de medida en pulgadas, pies, centímetros y metros.
4. Determinen qué tanto mayor o menor es la longitud de un objeto comparado con otro, expresando la diferencia en unidades de longitud comunes.

<sup>3</sup> Las explicaciones pueden ir acompañadas del uso de dibujos u objetos.

**B. Relacionen las operaciones de adición y sustracción con el concepto de longitud.**

- Utilizando números menores de 100 apliquen los métodos de adición y sustracción, para resolver problemas con enunciado verbal que consideren medidas de longitud dadas en las mismas unidades. Por ejemplo, recurriendo a dibujos (como figuras de reglas) y ecuaciones que incluyan un signo de interrogación en lugar del valor desconocido para plantear el problema.
- En una recta numérica con divisiones iguales marcadas con los números 0, 1, 2, . . . , expresen números enteros en términos de valores de longitud a partir de 0 y, escriban las sumas y las diferencias con números enteros hasta 100.

**C. Ejercicios con horas y dinero.**

- Utilizando relojes análogos y digitales, digan y escriban las horas redondeándolas a los cinco minutos más cercanos y utilizando la notación a. m. , y p. m.
- Resuelvan problemas con enunciado verbal que contemplen relaciones de dinero con billetes de 1 dólar, pesetas, sencillos (dimes), níquel (nickel) y centavos o peniques (pennies). Utilicen los signos \$ y ¢ de acuerdo a su conveniencia. *Ejemplo: Si usted tiene 2 sencillos y 3 centavos, ¿cuántos centavos tiene en total?*

**C. Modelen e interpreten los datos.**

- Obtengan una serie de mediciones calculando la longitud de varios objetos y redondeándolas a la unidad entera más próxima o, midiendo en diferentes oportunidades el mismo objeto. Hagan una representación gráfica de los diferentes resultados, sobre una línea que tenga las unidades de la escala horizontal marcadas con números enteros.
- Utilicen un gráfica de imágenes y otra de barras (con escala de una sola unidad), para representar una serie de datos clasificados en cuatro categorías. A partir de la información obtenida en una gráfica de barras,<sup>4</sup> resuelvan problemas sencillos de agrupación y reducción y hagan una relación entre ellos.

**Geometría**

**2. G**

**A. Hagan deducciones considerando figuras geométricas y sus propiedades.**

- Determinen y tracen figuras con propiedades específicas, tales como un número conocido de ángulos o de superficies laterales iguales.<sup>5</sup> Identifiquen triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos y cubos.
- Dividan un rectángulo en filas y columnas que demarquen unidades cuadradas del mismo tamaño, y cuenten para determinar la cantidad total resultante.
- Descompongan círculos y rectángulos en dos, tres y cuatro partes iguales y describan éstas utilizando las expresiones *mitades*, *tercios*, *mitad de*, *un tercio de*, etc. , y describan los resultados en términos de dos mitades, tres tercios y cuatro cuartos. Observen que partes iguales resultantes de la partición de unidades enteras idénticas, no necesariamente tienen la misma forma.

<sup>4</sup>Consulten la tabla 1 del glosario.

<sup>5</sup>Los tamaños deben ser comparados de manera directa o visual, no mediante su medición.

## Matemáticas | 3<sup>er</sup> Grado

En el 3<sup>er</sup> grado, la enseñanza debe concentrarse en el cubrimiento de cuatro áreas fundamentales: (1) aprendizaje del concepto de multiplicación y división, y solución de estas operaciones con números menores de 100; (2) aprendizaje del concepto de números fraccionarios especialmente de fracciones unitarias (con numerador 1); (3) aprendizaje de la estructura de series rectangulares y el concepto de área; y, (4) descripción y análisis de formas tridimensionales.

(1) Los/as estudiantes aprenden las implicaciones de las operaciones de multiplicación y división de números enteros, desarrollando actividades y problemas que incluyan grupos, series y modelos de área de igual tamaño. En estos casos, las operaciones de multiplicación tratan de encontrar un producto desconocido y las de división, un factor desconocido. En casos que presenten grupos de igual tamaño, la división puede buscar un número desconocido de grupos ó el tamaño del grupo desconocido. Para resolver problemas de multiplicación y división que incluyen factores de un solo dígito, los/as estudiantes aplican las propiedades de las operaciones para calcular productos de números enteros, utilizando modelos cada vez más complejos que se fundamentan en estas propiedades. A través del estudio de diferentes métodos de solución, los/as estudiantes aprenden la relación existente entre las operaciones de multiplicación y división.

(2) Los/as estudiantes aprenden los conceptos de números fraccionarios, comenzando con las fracciones unitarias. Ellos/as entienden las fracciones de manera genérica considerándolas como resultado de fracciones unitarias, y junto con modelos visuales de fracción, las utilizan para representar partes de un número entero. Los/as estudiantes aprenden, que el tamaño de un número fraccionario depende del tamaño del número entero al que pertenece. Por ejemplo,  $\frac{1}{2}$  de la pintura contenida en un pequeño tarro puede ser menor cantidad de pintura que  $\frac{1}{3}$  de la pintura contenida en un tarro más grande; pero  $\frac{1}{3}$  de la longitud de una cinta es mayor que  $\frac{1}{5}$  de la longitud de la misma cinta, debido a que cuando la cinta se divide en 3 partes iguales, estas partes son más largas que cuando la cinta se divide en 6 partes. Los/as estudiantes pueden utilizar fracciones para representar números iguales a, menores que y más grandes que 1. Resuelven problemas sobre comparación de fracciones, utilizando modelos visuales de fracciones y métodos basados en la percepción de numeradores o denominadores de un mismo valor.

(3) Los/as estudiantes aprenden el concepto de área como propiedad de áreas bidimensionales. Ellos/as miden el área de una figura calculando el número total de unidades de área de igual tamaño, necesarias para completar la extensión de la figura sin dejar espacios o superponerlas, que resulta ser un cuadrado cuyos lados tienen la unidad de longitud básica utilizada para medir el área. Los/as estudiantes aprenden que las distribuciones rectangulares pueden ser divididas a su vez en filas o columnas idénticas. Mediante la fragmentación de rectángulos en distribuciones rectangulares de cuadrados, los/as estudiantes relacionan el concepto de área a la multiplicación, para calcular el área de un rectángulo.

(4) Los/as estudiantes explican, estudian y comparan las propiedades de las figuras bidimensionales. Comparan y clasifican las figuras geométricas considerando sus lados y ángulos, y relacionan estos con sus definiciones. También relacionan la geometría con su estudio de las fracciones, expresando el área parcial de una figura como fracción unitaria de su área total.

## Operaciones y razonamiento algebraico

## 3. OA

### A. Representen y resuelvan problemas de multiplicación y división.

1. Entiendan el resultado de productos de números enteros; p. ej. , consideren  $5 \times 7$  como la cantidad total de elementos que se encuentran en 5 grupos de 7 elementos cada uno. *Por ejemplo, describan una situación en la que un número total de elementos se pueda representar como  $5 \times 7$ .*
2. Entiendan los cocientes enteros resultantes de números enteros; p. ej. , consideren  $56 \div 8$  como la cantidad de elementos que hay en cada unidad, cuando 56 objetos se dividen en 8 partes iguales ó, como la cantidad de

partes que resultan de dividir 56 elementos en unidades iguales de 8 elementos cada una. *Por ejemplo, describan una situación en la que un número de partes ó cantidad de grupos, se pueda representar como  $56 \div 8$ .*

- Realicen operaciones de multiplicación y división con números hasta 100, que resuelvan problemas con enunciado verbal e incluyan grupos, series y unidades de medidas iguales; p. ej. , utilizando dibujos y ecuaciones que reemplacen el número desconocido con un signo de interrogación, para plantear el problema.<sup>1</sup>
- Determinen el número desconocido en una ecuación que implique multiplicación o división de tres números enteros. *Por ejemplo, ¿pueden determinar el número desconocido que hace verdadera la ecuación en cada uno de los casos  $8 \times ? = 48$ ,  $5 = \square \div 3$ ,  $6 \times 6 = ?$ .*

#### B. Comprendan las propiedades de la multiplicación y las relaciones entre la multiplicación y la división.

- Practiquen las propiedades de las operaciones matemáticas, aplicándolas como métodos para multiplicar y dividir.<sup>2</sup> *Ejemplos: Si  $6 \times 4 = 24$ , entonces  $4 \times 6 = 24$ . (Propiedad conmutativa de la multiplicación). El resultado de la operación  $3 \times 5 \times 2$  puede ser obtenido también multiplicando  $3 \times 5 = 15$ , y luego  $15 \times 2 = 30$ ; ó del mismo modo, multiplicando  $5 \times 2 = 10$ , y luego  $3 \times 10 = 30$ . (Propiedad conmutativa de la multiplicación). Sabiendo que  $8 \times 5 = 40$  y que  $8 \times 2 = 16$ , podemos deducir que  $8 \times 7$  es igual a  $8 \times (5 + 2) = (8 \times 5) + (8 \times 2) = 40 + 16 = 56$ . (Propiedad distributiva).*
- Comprendan la operación de división como un problema que incluye un factor desconocido. *Por ejemplo, desarrollen la operación  $32 \div 8$  buscando el número que dé 32 cuando se multiplique por 8.*

#### C. Multipliquen y dividan con números hasta 100.

- Aprendan a multiplicar y dividir de manera fácil con números hasta 100, aplicando métodos como los que se fundamentan en las relaciones matemáticas existentes entre estas dos operaciones (p. ej. , si sabemos que  $8 \times 5 = 40$ , sabremos que  $40 \div 5 = 8$ ) o las propiedades de las operaciones. Al término del tercer grado, deben saber de memoria todos los productos de dos números que contengan un solo dígito.

#### D. Resuelvan problemas que incluyan las cuatro operaciones, y determinen y expliquen los patrones en aritmética.

- Resuelvan problemas con enunciado verbal aplicando las cuatro operaciones. Expresen estos problemas por medio de ecuaciones que incluyan una letra en lugar de la cantidad desconocida. Evalúen la validez de las respuestas mediante procesos mentales de computación y de cálculo, que incluyan redondear las cifras hasta el dígito más cercano.<sup>3</sup>
- Identifiquen modelos aritméticos (incluyendo los presentes en las tablas de la suma o de la multiplicación), y demuestren su fundamento a partir de las propiedades de las operaciones. *Por ejemplo, observen que cualquier número multiplicado por 4 da siempre como resultado un número par; expliquen entonces la razón por la que el resultado de multiplicar cualquier número por 4, puede ser descompuesto en dos sumandos de igual valor.*

## Números y operaciones en el Sistema Decimal

## 3. NBT

### A. Apliquen en operaciones aritméticas con varios dígitos, su conocimiento del valor posicional junto con el de las propiedades operacionales.<sup>4</sup>

- Utilicen sus conocimientos sobre valor posicional, para redondear números enteros hasta la unidad más cercana a 10 ó a 100.
- Sumen y resten de manera ágil diferentes magnitudes menores de 1000, aplicando métodos que incluyan los conceptos de valor posicional, las propiedades operacionales y/o las relaciones entre la adición y la sustracción.

<sup>1</sup> Consulten la tabla 2 del glosario.

<sup>2</sup> No es necesario que los/as estudiantes aprendan los nombres técnicos de estas propiedades.

<sup>3</sup> Este estándar aplica solamente a problemas que consideren números enteros y que sus resultados sean también enteros; los/as estudiantes deben aprender la forma de realizar operaciones en el orden convencional, sin presencia de paréntesis que especifiquen un orden particular (Orden de las Operaciones).

<sup>4</sup> Pueden hacer uso de un rango de algoritmos.

- Multipliquen números enteros de un solo dígito por magnitudes que sean múltiplos de 10, dentro del rango de valores de 10 a 90 (p. ej. ,  $9 \times 80$ ,  $5 \times 60$ ), aplicando métodos que consideren el valor posicional y las propiedades de las operaciones.

## Números y Operaciones - Fracciones

## 3. NF

### A. Aprendan a ver las fracciones como un tipo de números.

- Consideren la fracción  $1/b$ , que tenga como denominadores los números 2, 3, 4, 6 y 8, como una cantidad compuesta por 1 unidad de un valor total que se divide entre  $b$  partes iguales; entiendan de la misma forma, que la expresión  $a/b$  representa una cantidad  $a$  integrada por unidades de tamaño  $1/b$ .
- Entienden una fracción que tenga por denominadores los números 2, 3, 4, 6 y 8, como números colocados en una recta numérica.
  - En una recta numérica representen la fracción  $1/b$ , determinando el intervalo de 0 hasta 1 como el número entero dividido en  $b$  partes iguales. Observen que cada división mide  $1/b$  y que el extremo final de esa unidad, marcado con el número 0, determina el número  $1/b$  sobre la recta numérica.
  - Sobre una recta numérica señalen la fracción  $a/b$ , marcando una unidad  $a$  con divisiones de longitud  $1/b$  a partir de 0. Observen que el intervalo resultante tiene de longitud  $a/b$  y que su extremo final señala el número  $a/b$  en la recta numérica.
- Expliquen con casos específicos las equivalencias de fracciones que tienen por denominador los números 2, 3, 4, 5, 6 y 8, y comparen las fracciones considerando sus tamaños.
  - Dos fracciones son equivalentes (iguales) si tienen la misma dimensión o, el mismo punto de referencia en una recta numérica.
  - Identifiquen y desarrollen fracciones simples equivalentes como por ejemplo,  $1/2 = 2/4$ ,  $4/6 = 2/3$ . Expliquen la razón por la que las fracciones son equivalentes, por ejemplo aplicando un modelo visual de fracción.
  - Expresen números enteros como fracciones y determinen fracciones que sean equivalentes a números enteros. *Ejemplos: Escriban 3 en una ecuación del tipo  $3 = 3/1$ ; observen que  $6/1 = 6$ ; ubiquen  $4/4$  y 1 en la misma división de una recta numérica.*
  - Tomando su valor como factor de comparación, relacionen dos fracciones que tengan el mismo numerador o el mismo denominador. Observen que las igualdades son válidas, solamente cuando las dos fracciones hacen referencia al mismo número entero. Anoten los resultados de las igualdades utilizando los símbolos matemáticos  $>$ ,  $=$ , ó  $<$ , y expliquen las conclusiones ayudándose por ejemplo con un modelo visual de fracción.

## Medición y datos

## 3. MD

### A. Resuelvan problemas que consideren la medición y cálculo de intervalos de tiempo, de volúmenes líquidos y de la masa de diferentes objetos.

- Consideren las horas redondeándolas a la unidad de minuto más próxima.
  - En un espacio de 60 minutos y utilizando relojes análogos y digitales, digan y escriban intervalos de tiempo medidos en minutos, redondeando éstos a la unidad de minuto más cercana.
  - Sobre una recta numérica calculen el tiempo transcurrido superior a 60 minutos, redondeando los minutos al cuarto de hora y a la media hora más próximas.
  - Resuelvan problemas planteados con enunciado verbal que consideren sumas y restas de intervalos de tiempo expresados en minutos; por ejemplo, representando el problema sobre una recta numérica.

2. Midan y calculen volúmenes de líquidos y la masa de diferentes objetos, expresándolos en las unidades estándar de gramo (g), kilogramo (Kg) y litros (l). <sup>5</sup>Desarrollen operaciones de suma, resta, multiplicación o división, para resolver problemas simples expresados con enunciado verbal, que consideren los conceptos de masa o de volumen dados en las mismas unidades; p. ej. , utilizando ilustraciones para plantear el problema (como un vaso de precipitados con escala de medidas). <sup>6</sup>

**B. Modelen e interpreten los datos.**

3. Dibujen un gráfico lineal y uno de barras con escalas para representar un conjunto de datos clasificados en varias categorías. Utilizando la información que aparece en las gráficas de barras, resuelvan las preguntas "cuánto más" y "cuánto menos" planteando problemas simples de un solo cálculo y, problemas que incluyan dos cálculos. *Por ejemplo, dibuje un gráfico de barras en el que cada cuadrado represente 5 mascotas.*
4. Obtengan los datos midiendo longitudes con reglas que tengan divisiones de mitad y cuartos de pulgada. Hagan una representación gráfica de los datos, en una línea que tenga las divisiones de la escala horizontal marcadas con unidades apropiadas —números enteros, mitades o cuartos.

**C. Medida geométrica: aprendan los conceptos de área y descríbanlos con operaciones de multiplicación y adición.**

5. Identifiquen el concepto de área como una propiedad de las figuras planas, y hagan ejercicios con medidas de área.
  - a. Un cuadrado cuyos lados tengan una longitud igual a 1, que llamaremos "una unidad cuadrada", tiene "una unidad cuadrada" de área y puede utilizarse como unidad de medida de área.
  - b. Una figura plana que puede ser comprendida por  $n$  unidades cuadradas colocadas sin espacios ni superposición, se dice que tiene un área de  $n$  unidades cuadradas.
6. Midan áreas por medio de la adición de unidades cuadradas (en centímetros cuadrados, metros cuadrados, pulgadas cuadradas, pies cuadrados y en otro tipo de unidades no convenidas).
7. Involucren el concepto de área en operaciones de multiplicación y adición.
  - a. Calculen mediante un diseño de mosaico, el área de un rectángulo que tenga por lado longitudes expresadas en números enteros, y demuestren que el área resultante es la misma que la que se calcula multiplicando las unidades de longitud de los lados.
  - b. Utilizando problemas tanto de la vida cotidiana como matemáticos, calculen las áreas de diferentes rectángulos multiplicando las medidas de longitud de sus lados expresadas en números enteros, y representen los resultados haciendo uso de figuras rectangulares para dar un razonamiento de tipo numérico.
  - c. Apliquen el método de ordenamiento en forma de mosaico, para demostrar en el caso concreto de un rectángulo cuyos lados tengan medidas (en números enteros)  $a$  y  $b + c$ , que su área es igual a la sumatoria de  $a \times b$  más  $a \times c$ . Para el razonamiento matemático, recurran a modelos de área que puedan demostrar la propiedad distributiva.

**D. Medida geométrica: entiendan el concepto de perímetro como una propiedad de las figuras planas y, diferencien las medidas lineales de las de área.**

8. Resuelvan problemas matemáticos y de la vida cotidiana que busquen el cálculo del perímetro de polígonos, incluyendo casos en que la longitud de sus lados sea conocida, en que uno de sus lados sea desconocido y, en rectángulos con un mismo perímetro pero área diferente ó con igual área pero diferente perímetro.

<sup>5</sup>No consideren unidades compuestas del tipo  $\text{cm}^3$  o calcular el volumen geométrico de un recipiente.

<sup>6</sup>Tampoco trabajen con problemas que incluyan igualdades con operaciones de multiplicación (que involucren conceptos como "tantas veces la cantidad de algo". Favor consultar el glosario, tabla 2).



**E. Ejercicios con dinero**

9. Resuelvan problemas con enunciado verbal que contemplen peniques (pennies), níquel (nickel), sencillos (dimes), pesetas y billetes con denominación mayor a 1 dólar. Utilicen los signos relativos a dólar y centavos de acuerdo a su conveniencia.

**Geometría**

**3. G**

**A. Hagan deducciones considerando figuras geométricas y sus propiedades.**

1. Observen que las figuras en sus diferentes categorías (es decir, rombos, rectángulos y demás), comparten propiedades (p. ej. , tener cuatro lados) y que estas pueden definir una categoría mayor (p. ej. , cuadriláteros). Consideren rombos, rectángulos y cuadrados como ejemplos de cuadriláteros y dibujen ejemplos de cuadriláteros que no correspondan a ninguna de las anteriores categorías.
2. Dividan las figuras en secciones con igual área. Consideren el área de cada parte como una fracción del área total de la figura a la que corresponde. *Por ejemplo, dividan un figura cualquiera en 4 partes de igual área y expresen el área de cada parte, como  $1/4$  del área total de la figura.*



## Matemáticas | 4º Grado

En el 4º grado, la enseñanza debe concentrarse en el cubrimiento de tres áreas fundamentales: (1) aprendizaje y fluidez en el manejo de la multiplicación de números con varios dígitos, y la comprensión de la división para hallar cocientes a partir de dividendos también con muchos dígitos; (2) aprendizaje de la equivalencia entre números fraccionarios, de la adición y sustracción de los mismos bajo un común denominador y, de su multiplicación por números enteros; (3) aprendizaje del concepto de que las figuras geométricas pueden ser analizadas y clasificadas con base en sus propiedades, tales como el paralelismo de sus lados, las medidas particulares de sus ángulos y la simetría.

(1) Los/as estudiantes generalizan el conocimiento del valor posicional de los dígitos hasta la cifra 1. 000. 000, comprendiendo su valor relativo de acuerdo con el lugar que ocupan. A medida que avanzan en su aprendizaje, que estudian y aplican de manera eficiente, precisa y generalizada los métodos para calcular resultados de las diferentes operaciones con números enteros compuestos por varios dígitos, los/as estudiantes ponen en práctica su aprendizaje sobre los modelos matemáticos para la multiplicación (con grupos, series y modelos de área de igual tamaño), sobre el valor posicional de los números y sobre las propiedades de la operación, en particular de la propiedad distributiva. Dependiendo de los números y del contexto en el que se encuentren, ellos/as seleccionan y desarrollan los métodos correctos para estimar o calcular mentalmente los resultados de operaciones matemáticas. Desarrollan habilidad en el manejo eficiente de los procedimientos existentes para la multiplicación de números enteros, entienden y explican la razón por la que los procedimientos de trabajo tienen como fundamento el valor posicional de los números y las propiedades de las operaciones, y los ponen en práctica para resolver problemas matemáticos. A medida que avanzan en su aprendizaje, que estudian y aplican de manera eficiente, precisa y generalizada, los procedimientos para calcular cocientes de dividendos compuestos por varios dígitos, los/as estudiantes ponen en práctica sus conocimientos de los modelos para la división, del valor posicional, de las propiedades de las operaciones y de las relaciones entre la división y la multiplicación. Seleccionan y ponen en práctica de manera precisa los métodos adecuados para estimar y calcular cocientes mentalmente y además, pueden interpretar el valor de los residuos teniendo en cuenta el contexto de la operación.

(2) Los/as estudiantes aprenden el concepto de equivalencia entre fracciones, además de las operaciones entre ellas. Entienden que dos fracciones diferentes pueden ser iguales (p. ej. ,  $15/9 = 5/3$ ) y, desarrollan métodos para obtener e identificar fracciones equivalentes. Los/as estudiantes amplían los conocimientos adquiridos con anterioridad para aprender que todas las fracciones están compuestas por fracciones unitarias, la forma como se obtienen fracciones a partir de fracciones unitarias, se reducen fracciones a fracciones unitarias y, la aplicación de los conceptos de fracción y multiplicación para multiplicar una fracción por un número entero.

(3) Los/as estudiantes explican, estudian, comparan y clasifican, las figuras bidimensionales. A través de la formación, del trazado y del estudio de las figuras bidimensionales, los/as estudiantes profundizan el conocimiento de sus propiedades y lo aplican en la solución de problemas relacionados con simetría.

## Operaciones y razonamiento algebraico

## 4. OA

### A. Practiquen las cuatro operaciones matemáticas para resolver problemas con números enteros.

1. Consideren una ecuación que incluya operaciones de multiplicación como una igualdad, y expresen las igualdades multiplicativas con enunciado verbal que impliquen ecuaciones de multiplicación. Por ejemplo, consideren la igualdad  $35 = 5 \times 7$ , como el enunciado de que 35 es el resultado de considerar 5 veces 7 ó, 7 veces 5.
2. Practiquen las operaciones de multiplicación o división en la solución de problemas que tengan enunciado verbal y consideren igualdades multiplicativas, por ejemplo, utilizando dibujos y/o ecuaciones que representen un problema que incluya un signo en lugar del número desconocido, marcando la diferencia entre la igualdad

multiplicativa y la igualdad aditiva (por ejemplo: Comparar las expresiones "6 veces una cantidad", frente a, "6 unidades más que. . .".<sup>1</sup>

3. Resuelvan problemas con enunciado verbal que ejerciten las cuatro operaciones con números enteros y que tengan productos con números enteros, incluyendo problemas cuyos residuos requieran interpretación. Expresen estos problemas por medio de ecuaciones que incluyan una letra en lugar de la cantidad desconocida. Evalúen la validez de las respuestas mediante procesos mentales de computación y de cálculo, que incluyan redondear las cifras hasta el dígito más cercano. *Ejemplo: Veinticinco personas van al cine. Cuatro de ellas se acomodan en un carro. ¿Cuántos carros se necesitan para llevar las veinticinco personas al cine en un solo viaje?*

#### B. Acostúmbrense a trabajar con factores y múltiplos.

4. Trabajando con números enteros dentro del rango de 1 a 100,
  - a. Encuentren todos los factores pares de un número entero dado.
  - b. Observen que un número entero cualquiera es múltiplo de cada uno de los factores que lo componen.
  - c. Determinen si un número entero dado es múltiplo de otro número compuesto por un solo dígito.
  - d. Señalen si un determinado número entero es número primo o compuesto.

#### C. Deduzcan y analicen los patrones.

5. Desarrollen un modelo numérico o alguna figura que se comporte de acuerdo con una determinada norma. Identifiquen las características aparentes del patrón, que no fuesen evidentes en la regla misma. *Por ejemplo, dado el argumento "sume 3" a partir del número 1, escriban los términos de la secuencia resultante y observen que estos alternan entre números pares e impares. Expliquen de manera sencilla la razón por la que los números alternan de esta forma.*

## Números y operaciones en el Sistema Decimal

## 4. NBT

### A. Generalicen el concepto de valor posicional para los números enteros formados por varios dígitos.

1. Observen que en cualquier número con varios dígitos que sea igual o menor de 1. 000. 000, cada uno de ellos tiene un valor 10 veces mayor que el dígito colocado a su derecha. *Por ejemplo, (1) observen que  $700 \div 70 = 10$ ; (2) que en el número 7. 246 el dígito 2 tiene un valor de 200 pero que en la cantidad 7. 426, su valor es de solo 20, notando que 200 es diez veces mayor que 20 según nos lo indican los conceptos de valor posicional y de la división.*
2. Lean y escriban números enteros compuestos por varios dígitos que sean iguales o menores de 1. 000. 000, utilizando la notación de base 10 (sistema decimal), los nombres de los números y su forma resuelta. Teniendo en cuenta los valores de los dígitos de acuerdo con su posición relativa, relacionen dos números compuestos por varios dígitos, utilizando los símbolos  $>$ ,  $=$ ,  $<$ , en la representación de los resultados de las comparaciones.
3. Apliquen el concepto de valor posicional para redondear cualquier cantidad, considerada dentro de números enteros iguales o menores de 1. 000. 000 y compuestos por varios dígitos.

### B. Apliquen en operaciones aritméticas con varios dígitos, su conocimiento del valor posicional junto con el de las propiedades operacionales.

4. Aplicando el algoritmo estándar, sumen y resten con agilidad números enteros formados por varios dígitos, cuyo resultado sea menor o igual de 1. 000. 000.
5. Multipliquen un número entero que tenga hasta 4 dígitos por un número entero con un solo dígito y, multipliquen también dos números de dos dígitos cada uno, utilizando métodos que consideren el valor posicional y las propiedades de las operaciones. Ilustren y expliquen el procedimiento recurriendo a ecuaciones, distribución secuencial de rectángulos y/o modelos de áreas.

<sup>1</sup> Consulten la tabla 2 del glosario.

6. Calculen los cocientes y residuos enteros que resulten de dividendos hasta con cuatro dígitos y divisores de un solo dígito, aplicando métodos que consideren los conceptos de valor posicional y las propiedades de las operaciones y/o, las relaciones entre las operaciones de multiplicación y división. Ilustren y expliquen el procedimiento recurriendo a ecuaciones, distribución secuencial de rectángulos y/o modelos de áreas.

## Números y Operaciones - Fracciones

## 4.NF

### A. Amplíen su conocimiento sobre equivalencia y secuencia de las fracciones.

1. Recurriendo a modelos visuales de fracciones expliquen la razón por la que  $a/b$  es equivalente a  $(n \times a)/(n \times b)$ , haciendo énfasis en la forma como el número y la cantidad de las partes difieren, a pesar de que las dos fracciones en sí mismas representan el mismo valor. Aplique este principio para identificar y desarrollar fracciones equivalentes. (Los denominadores tienen que ser 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12 y 100).
2. Relacione dos fracciones que tengan numeradores y denominadores no comunes, por ejemplo, aplicando el método de cálculo de numeradores y denominadores comunes o, mediante la comparación con una fracción referente como  $1/2$ . Observen que las igualdades son válidas, solamente cuando las dos fracciones hacen referencia al mismo número entero. Anoten los resultados de las igualdades utilizando los símbolos matemáticos  $>$ ,  $=$ ,  $<$ , y expliquen las conclusiones ayudándose por ejemplo con un modelo visual de fracción. (Los denominadores tienen que ser 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12 y 100).

### B. Obtengan números fraccionarios a partir de fracciones unitarias, poniendo en práctica el desarrollo del conocimiento previo sobre operaciones con números enteros.

3. Consideren la fracción  $a/b$  en la que  $a > 1$ , como la sumatoria de  $1/b$  números fraccionarios. (Los denominadores tienen que ser 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12 y 100).
  - a. Consideren las operaciones de adición y sustracción como unión y separación de unidades integrantes de una misma cantidad. *Ejemplo:*  $3/4 = 1/4 + 1/4 + 1/4$ .
  - b. Descompongan de diferentes maneras un número fraccionario en sumatorias de fracciones que tengan el mismo denominador, y expresen en una ecuación cada operación de descomposición. Expliquen el procedimiento utilizando por ejemplo un modelo visual de fracción. *Ejemplos:*  $3/8 = 1/8 + 1/8 + 1/8$ ;  $3/8 = 1/8 + 2/8$ ;  $2 \frac{1}{8} = 1 + 1 + 1/8 = 8/8 + 8/8 + 1/8$ .
  - c. Sumen y resten números mixtos que tengan denominadores comunes, reemplazando por ejemplo cada número mixto por una fracción equivalente y/o, mediante la aplicación de las propiedades de las operaciones y la relación entre las operaciones de adición y sustracción.
  - d. Resuelvan problemas que tengan enunciado verbal y, planteen operaciones de suma y resta de fracciones que representen un mismo valor total y tengan el mismo denominador. Para plantear el problema pueden aplicar por ejemplo modelos visuales de fracciones y ecuaciones.
4. Multipliquen un número fraccionario por un número entero. (Los denominadores tienen que ser 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12 y 100).
  - a. Consideren la fracción  $a/b$  como múltiplo de  $1/b$ . *Por ejemplo, utilicen un modelo visual fraccionario para representar  $5/4$  como el producto de la multiplicación de  $5 \times (1/4)$ , y anoten el resultado en la ecuación  $5/4 = 5 \times (1/4)$ .*
  - b. Consideren un múltiplo de  $a/b$  como múltiplo también de  $1/b$ , y apliquen este conocimiento para multiplicar un número fraccionario por un número entero. *Por ejemplo, utilicen un modelo visual fraccionario para expresar el factor  $3 \times (2/5)$  como  $6 \times (1/5)$ , teniendo en cuenta que el resultado de este producto es  $6/5$ . [En general,  $n \times (a/b) = (n \times a)/b$ .]*
  - c. Resuelvan problemas que tengan enunciado verbal y consideren la multiplicación de un número fraccionario por un número entero, aplicando por ejemplo modelos visuales de fracciones y ecuaciones para resolver el problema. *Por ejemplo, si cada persona en una fiesta con 5 asistentes consume  $3/8$  de libra de carne asada,*

¿cuántas libras de carne asada será necesario comprar? ¿Cuál es el par de números enteros que encierra su respuesta?

**C. Aprendan la notación decimal para representar números fraccionarios, y comparen números fraccionarios en su notación decimal.**

5. Escriban una fracción con denominador 10 como su equivalente con denominador 100 y, apliquen esta técnica para sumar dos fracciones que tengan denominadores 10 y 100 respectivamente. <sup>2</sup>Por ejemplo, escriba la fracción  $3/10$  como  $30/100$  y sume de la siguiente manera:  $3/10 + 4/100 = 34/100$ .
6. Utilicen la notación decimal para representar números fraccionarios con denominadores 10 o 100. Por ejemplo, escriban  $0.62$  como  $62/100$ ; escriban una determinada longitud como  $0,62$  metros; representen la cantidad  $0,62$  sobre una recta numérica; representen la fracción  $62/100$  de un dólar como  $\$0,62$ .
7. Tomando como referencia su valor, comparen dos magnitudes decimales considerando hasta las centésimas. Observen que las igualdades son válidas, solamente cuando los dos decimales hacen referencia al mismo número entero. Anoten los resultados de las igualdades utilizando los símbolos matemáticos  $>$ ,  $=$ , ó  $<$ , y expliquen las conclusiones ayudándose por ejemplo con un modelo visual.

**Medición y datos**

**4.MD**

**A. Resuelvan problemas que consideren unidades de medida, además de la conversión de medidas de una unidad mayor a otra menor.**

1. Aprendan los valores relativos de las unidades de medida según uno de los sistemas internacionales, incluyendo, pie, pulg; km, m, cm; kg, g; lb, oz; l, ml; h, min y s. Teniendo en cuenta uno solo de los sistemas de medidas, expresen valores de unidades mayores en cantidades más pequeñas. Anoten las equivalencias de las medidas en una tabla con dos columnas. (Las operaciones de conversión deben tener un solo paso). Por ejemplo, noten que  $1$  pie equivale a  $12$  veces la longitud de  $1$  pulg. Escriban la longitud de una serpiente de  $4$  pies de largo como  $48$  pulg. Elaboren una tabla de conversión de pies a pulgadas anotándolos por parejas  $(1, 12)$ ,  $(2, 24)$ ,  $(3, 36)$  ...
2. Apliquen las cuatro operaciones para resolver problemas que tengan enunciado verbal y consideren valores de distancia, volúmenes de líquidos, masas de objetos y dinero, incluyendo problemas que utilicen números enteros y/o fracciones simples (adición y sustracción de fracciones con denominadores comunes y la multiplicación de una fracción por otra<sup>3</sup> ó, por un número entero), además de problemas que requieran la conversión de medidas mayores en medidas de menor valor. Representen magnitudes de medidas utilizando diagramas como rectas numéricas con una escala de medida.
3. Apliquen las fórmulas para hallar áreas y perímetros de rectángulos, tanto en situaciones de la vida cotidiana como en problemas matemáticos. Por ejemplo, conociendo el área y la longitud del piso determinen el ancho de un salón de forma rectangular, aplicando para su cálculo la fórmula de una ecuación de multiplicación con una incógnita.

**B. Modelen e interpreten los datos.**

4. Representen gráficamente un conjunto de datos de medidas dadas en fracciones unitarias ( $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$ ). Utilizando la información que presentan los diagramas lineales, resuelvan problemas que consideren la adición y sustracción de fracciones. Por ejemplo, a partir de los datos de una de las gráficas, calculen y analicen la diferencia en longitud entre los especímenes más grandes y más pequeños de una colección de insectos.

<sup>2</sup> Los/as estudiantes que pueden deducir fracciones equivalentes, pueden así mismo desarrollar técnicas de aplicación general para sumar fracciones con denominadores no comunes. Sin embargo, en este grado las operaciones de adición y sustracción de factores con diferentes denominadores no son un requisito.

<sup>3</sup> Los/as estudiantes en 4º grado presentarán evaluaciones sobre multiplicación de números fraccionarios con números enteros, tal como se indicó en el dominio NF. Algunos/as estudiantes podrán multiplicar dos fracciones entre sí como resultado de su aprendizaje en deducción de fracciones equivalentes; sin embargo, el dominio de este tipo de operaciones solo se logra en el grado 5.

**C. Medición geométrica: aprendan los conceptos de ángulo y sus medidas.**

5. Consideren los ángulos como figuras geométricas formadas por dos semirrectas que tienen un punto de encuentro, y familiarícense con los conceptos de medidas de ángulos.
  - a. Un ángulo se mide teniendo como referencia un círculo con su centro en el punto de encuentro de las semirrectas, considerando la fracción del arco circular entre los puntos en el que las dos semirrectas intersecan el círculo.
  - b. Un ángulo que gira  $\frac{1}{360}$  de la rotación completa de un círculo se denomina "ángulo de 1 grado", y puede ser utilizado como unidad de medida de ángulos.
  - c. Un ángulo que recorre  $n$  ángulos de 1 grado se dice que tiene un ángulo que mide  $n$  grados.
6. Utilizando un transportador determinen medidas de ángulos en grados con números enteros. Dibujen ángulos con medidas conocidas.
7. Consideren la medida de los ángulos como una operación de adición. Cuando un ángulo se descompone en secciones no superpuestas, la medida del ángulo completo es el resultado de la suma de las medidas de las secciones. En un diagrama resuelvan problemas matemáticos y de la vida cotidiana sobre adición y sustracción para calcular medidas de ángulos, desarrollando por ejemplo ecuaciones que contengan una letra en reemplazo de la medida que se busca.

**D. Involucren el concepto de área en operaciones de multiplicación y adición.**

8. Entiendan el concepto de área como una situación de adición. Obtengan áreas de figuras rectilíneas descomponiendo éstas en rectángulos no superpuestos, y agréguelas consecutivamente sin superponerlas. Apliquen este método para resolver problemas de la vida cotidiana.

**Geometría**

**4.G**

**A. Dibujen e identifiquen líneas y ángulos, y clasifiquen figuras geométricas de acuerdo con las propiedades de sus líneas y ángulos.**

1. Dibujen puntos, líneas, segmentos de líneas, semirrectas, ángulos (rectos, agudos y obtusos), además de líneas perpendiculares y paralelas. Formen con ellas figuras bidimensionales.
2. Clasifiquen las figuras bidimensionales con base en las presencia o ausencia de líneas paralelas o perpendiculares y, de ángulos con dimensión conocida. Refiéranse a los triángulos rectángulos como a una categoría y aprendan a reconocerlos.
3. Observen que una línea de simetría dentro de una figura bidimensional es aquella que corta la figura de tal forma, que ésta se puede doblar sobre sí misma a lo largo de la línea para formar dos secciones idénticas. Obtengan algunas figuras que contengan posibles líneas de simetría y tracen las líneas.

## Matemáticas | 5º Grado

En el 5º grado, la enseñanza debe concentrarse en el cubrimiento de tres áreas fundamentales: (1) desarrollo de fluidez en el manejo de operaciones de adición y sustracción de fracciones, y aprendizaje de casos especiales de multiplicación y división de fracciones (fracciones unitarias divididas entre números enteros y estos últimos divididos entre fracciones unitarias); (2) ampliación del conocimiento de la división a operaciones de división con divisores de dos dígitos, integrando fracciones decimales al sistema de valor posicional y, aprendizaje de operaciones con decimales que incluyan centésimas, además de la práctica en el manejo de operaciones que incluyan números enteros y decimales; y, (3) aprendizaje del concepto de volumen.

(1) Los/as estudiantes deben practicar su conocimiento en operaciones de adición y sustracción de fracciones y modelos de fracciones con denominadores no comunes, para realizar las mismas operaciones con fracciones que tengan denominadores comunes. Ellos/as desarrollan fluidez en el desarrollo de sumas y restas de números fraccionarios, y pueden hacer estimaciones acertadas a partir de ellas. Los/as estudiantes también aplican los fundamentos de los números fraccionarios, de la multiplicación y la división y de la relación entre la multiplicación y la división, para comprender y poder explicar la razón por la que son válidos los procedimientos para multiplicar y dividir números fraccionarios. (Nota: esto tiene aplicación solamente para el caso de división de fracciones unitarias entre números enteros y viceversa).

(2) Los/as estudiantes aprenden la razón de la funcionalidad de los procedimientos de la división, con base en el concepto de números de base diez (sistema decimal) y de las propiedades de las operaciones. Ellos/as culminan su destreza con la práctica de operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división, con magnitudes formadas por varios dígitos. Ponen en práctica sus conocimientos sobre modelos de números decimales, nomenclatura decimal y propiedades de las operaciones, para sumar y restar números decimales que incluyan hasta centésimas. Adquieren destreza en estos cálculos y realizan estimaciones acertadas sobre sus resultados. Los/as estudiantes aplican las relaciones entre números decimales y fraccionarios así como también la ley entre números decimales finitos y números enteros (es decir, la multiplicación de un número decimal finito por una adecuada potencia de diez da siempre como resultado un número entero), para comprender y poder explicar la razón por la que son válidos los procedimientos para multiplicar y dividir números finitos decimales. Ellos/as pueden calcular de manera rápida y exacta, los productos y cocientes de números decimales formados hasta centésimas.

(3) Los/as estudiantes aprenden el concepto de volumen como propiedad de espacios tridimensionales. Ellos/as aprenden que el volumen puede calcularse buscando la cantidad total de unidades de volumen del mismo valor, que se necesita para llenar un espacio determinado sin dejar intervalos entre ellas ni superponerlas. Aprenden que la unidad 1 multiplicada por sí misma tres veces, equivale a la medida cubica estándar para el cálculo del volumen. Ellos/as escogen las medidas, métodos y cálculos correspondientes, para resolver problemas que contemplan la estimación y medida del volumen. Saben descomponer figuras tridimensionales y calcular las medidas de volumen de prismas rectangulares rectos, analizándolos como estructuras de capas de cubos organizados de manera secuencial. Calculan las propiedades necesarias de las figuras con el fin de determinar sus volúmenes, y así poder resolver problemas matemáticos y de la vida cotidiana.

## Operaciones y razonamiento algebraico

## 5.OA

### A. Escriban y analicen expresiones numéricas.

- Utilicen los paréntesis o corchetes en las expresiones numéricas, y desarrollen dichas expresiones teniendo en cuenta estos signos.
- Escriban expresiones simples que registren cálculos realizados con números enteros, fraccionarios y decimales, y consideren las expresiones numéricas sin desarrollarlas. *Por ejemplo, expresen de manera matemática la instrucción “sumen 8 y 7, y luego multipliquen por 2”, en la forma  $2 \times (8 + 7)$ . Observen que  $3 \times (18.932 + 9,21)$  es tres veces mayor que  $18.932 + 9,21$ , sin necesidad de desarrollar la suma o el producto señalados.*

### B. Analicen patrones y relaciones existentes.



3. Deduzcan dos patrones numéricos aplicando dos reglas ya aprendidas. Identifiquen relaciones manifiestas entre términos correspondientes. A partir de los dos patrones obtenidos, organicen parejas que contengan términos correspondientes y hagan con ellas una gráfica en un plano de coordenadas. *Por ejemplo, expresen los argumentos "sume 3" a partir del número 0 y "sume 6" a partir de 0; escriban los términos de las secuencias resultantes y observen que el valor de una de ellas, equivale al doble del valor en la otra secuencia. Expliquen en términos sencillos la razón de este resultado.*

## Números y operaciones en el Sistema Decimal

## 5. NBT

### A. Comprendan el sistema de valor posicional.

1. Observen que en cualquier número con varios dígitos, cada uno de ellos tiene un valor 10 veces mayor que el dígito colocado a su derecha, y equivale a  $1/10$  del valor que tiene el dígito a su izquierda.
2. Determinen y expliquen patrones manifiestos en la serie de los ceros de un producto, cuando un número cualquiera se multiplica por potencias de 10. Determinen y expliquen patrones manifiestos en los valores adquiridos por los dígitos en un producto o cociente, cuando un número decimal cualquiera se multiplica o divide por una potencia de 10. Apliquen exponentes enteros para determinar las potencias de 10 escogidas. *Por ejemplo,  $10^0 = 1$ ,  $10^1 = 10$  . . . y  $2,1 \times 10^2 = 210$ .*
3. Lean, escriban y comparen números decimales que incluyan hasta milésimas.
  - a. Lean y escriban números decimales que incluyan hasta milésimas, utilizando números de base 10, los nombres de los números y fórmulas desarrolladas; por ejemplo,  $347,392 = 3 \times 100 + 4 \times 10 + 7 \times 1 + 3 \times (1/10) + 9 \times (1/100) + 2 \times (1/1000)$ .
  - b. Teniendo en cuenta los valores de los dígitos de acuerdo con su posición relativa, relacionen dos números decimales que incluyan milésimas, utilizando los símbolos  $>$ ,  $=$ ,  $<$ , en la representación de los resultados de las comparaciones.
4. Apliquen el conocimiento que tienen sobre el valor posicional, para redondear los decimales hasta la unidad más cercana.

### B. Desarrollen operaciones con números enteros que tengan varios dígitos, y con números decimales que incluyan centésimas.

5. Aplicando el algoritmo estándar, multipliquen con facilidad números enteros que tengan varios dígitos.
6. Calculen los cocientes enteros resultantes de divisiones de números enteros que tengan dividendos de cuatro dígitos y divisores de dos, aplicando métodos que consideren los conceptos de valor posicional, las propiedades de las operaciones, la resta de números que sean múltiplos de los divisores y/o, la relación entre las operaciones de multiplicación y división. Muestren ejemplos y/o expliquen el proceso de cálculo utilizando ecuaciones, series rectangulares, modelos de área o cualesquier otros métodos que consideren el concepto de valor posicional.
7. Sumen, resten, multipliquen y dividan números decimales que incluyan centésimas, recurriendo a modelos o dibujos y métodos específicos que consideren los conceptos de valor posicional, las propiedades de las operaciones y/o la ley entre la adición y la sustracción. Demuestren el razonamiento seguido mediante una expresión escrita.

## Números y Operaciones - Fracciones

## 5.NF

### A. Apliquen el concepto de fracciones equivalentes como método para sumar y restar números fraccionarios.

1. Sumen y resten números fraccionarios que tengan denominadores no comunes (incluyendo números mixtos), siguiendo el método de reemplazo de las fracciones conocidas por números fraccionarios equivalentes, de tal forma que se obtenga como resultado una suma o resta equivalente de fracciones con denominadores comunes. *Por ejemplo,  $2/3 + 5/4 = 8/12 + 15/12 = 23/12$ . (Generalizando,  $a/b + c/d = (ad + bc)/bd$ .)*



2. Resuelvan problemas con enunciado verbal, que consideren casos de adición y sustracción de números fraccionarios.
  - a. Resuelvan problemas que tengan enunciado verbal y, planteen operaciones de suma y resta de fracciones que representen un mismo valor total y tengan el mismo denominador. Para plantear el problema pueden aplicar por ejemplo modelos visuales de fracciones y ecuaciones.
  - b. Utilicen números fraccionarios de referencia y el sentido intuitivo de los números fraccionarios, con el fin de deducir mentalmente y explicar la validez de las respuestas. *Por ejemplo, determinen un resultado incorrecto como  $2/5 + 1/2 = 3/7$ , teniendo en cuenta que  $3/7 < 1/2$ .*

**B. Apliquen y amplíen los conocimientos adquiridos con anterioridad sobre la multiplicación y la división, para realizar operaciones de multiplicación y división de fracciones.**

3. Consideren un número fraccionario como la división de un numerador entre un denominador, de la siguiente manera:  $(a/b = a \div b)$ . Resuelvan problemas con enunciado verbal que incluyan operaciones de división de números enteros, que den como resultado números fraccionarios o mixtos; por ejemplo, utilizando modelos visuales de fracciones o ecuaciones para plantear el problema. *Por ejemplo, consideren  $3/4$  como la división de 3 entre 4, teniendo en cuenta que  $3/4$  multiplicado por 4 da igual a 3, y que cuando 3 unidades enteras se reparten de igual manera entre 4 personas, cada una de ellas recibe una cantidad igual a  $3/4$ . Si 9 personas desean dividir por partes iguales un saco que tenga 50 lb de arroz, ¿cuántas libras debería recibir cada persona? ¿Cuál es el par de números enteros que encierra su respuesta?*
4. Apliquen y amplíen los conocimientos adquiridos con anterioridad sobre la multiplicación, para poder multiplicar un número fraccionario o entero por otra fracción.
  - a. Consideren el producto  $(m/n) \times q$  como  $m$  partes de la división de  $q$  entre  $n$  partes iguales; de igual manera, como el resultado de una secuencia de operaciones de la siguiente forma:  $m \times q \div n$ . *Por ejemplo, utilicen un modelo visual de número fraccionario para demostrar su comprensión, y desarrollen un caso para la relación  $(m/n) \times q$ .*
  - b. Desarrollen un modelo que les permita entender el concepto de multiplicación de dos números fraccionarios, y un caso que considere tal ecuación. [Generalizando,  $(m/n) \times (c/d) = (mc)/(nd)$ .]
  - c. Calculen mediante un diseño de mosaico con unidades cuadradas cuyos lados tengan fracciones unitarias como longitud, el área de un rectángulo que tenga por lado longitudes expresadas en números fraccionarios, y demuestren que el área resultante es la misma que la que se calcula multiplicando las unidades de longitud de los lados.
  - d. Para determinar las áreas de los rectángulos, multipliquen las medidas de longitud de los lados expresadas en números fraccionarios, y representen los resultados fraccionarios como áreas rectangulares.
5. Entiendan la operación de la multiplicación como una forma de ajuste de escalas (redimensionamiento), de la siguiente manera:
  - a. Relacionando el valor de un producto con el valor de uno de los factores sobre la base del valor del otro factor, sin llegar a desarrollar la multiplicación que queda indicada.
  - b. Explicando la razón por la que al multiplicar un determinado número por una fracción mayor a 1, el resultado es un producto de mayor valor que el número dado (dando por hecho que la multiplicación por números enteros mayores de 1 es un caso conocido).
  - c. Explicando la razón por la que al multiplicar un número por una fracción menor a 1, el resultado es un producto de menor valor que el número dado.
  - d. Relacionando el principio de equivalencia de números fraccionarios  $a/b = (n \times a)/(n \times b)$ , con el resultado de multiplicar  $a/b$  por 1.
6. Resuelvan problemas de la vida cotidiana que consideren la multiplicación de números fraccionarios y mixtos, aplicando por ejemplo modelos visuales de fracciones o ecuaciones para resolver el problema.

7. Apliquen y amplíen los conocimientos adquiridos con anterioridad sobre la división, para el caso de división de fracciones unitarias entre números enteros y viceversa.<sup>1</sup>
- Representen la división de una fracción unitaria entre un número entero diferente a cero, y calculen los cocientes correspondientes. *Por ejemplo, desarrollen un caso que considere la operación  $(1/3) \div 4$ , y utilicen un modelo visual fraccionario para obtener el cociente. Apliquen la relación entre la multiplicación y la división, para demostrar que  $(1/3) \div 4 = 1/12$  puesto que  $(1/12) \times 4 = 1/3$ .*
  - Representen la división de un número entero por una fracción unitaria y calculen los cocientes correspondientes. *Por ejemplo, desarrollen un caso que considere la operación  $4 \div (1/5)$ , y utilicen un modelo visual fraccionario para obtener el cociente. Apliquen la relación entre la multiplicación y la división, para demostrar que  $4 \div (1/5) = 20$  puesto que  $20 \times (1/5) = 4$ .*
  - Resuelvan problemas de la vida cotidiana que consideren la división de fracciones unitarias entre números enteros y viceversa, recurriendo por ejemplo a modelos visuales fraccionarios y ecuaciones para plantear el problema. *Por ejemplo, ¿cuánto chocolate recibirá cada persona, si 3 de ellas comparten  $1/2$  lb por partes iguales? ¿Cuántas porciones de  $1/3$  de taza hay en 2 tazas de uvas pasa?*

## Medición y datos

## 5.MD

### A. Conviertan unidades de medida de un mismo sistema, a unidades de un sistema diferente.

- Conviertan unidades de medida estándar de diferentes tamaños dentro de un sistema de medida dado, y apliquen estas conversiones en la solución de problemas cotidianos siguiendo procedimientos de varios pasos, (por ejemplo, convertir 5 cm a 0,05 m y 9 pies a 108 pulgadas).

### B. Modelen e interpreten los datos.

- Representen gráficamente un conjunto de datos de medidas dadas en fracciones unitarias ( $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$ ). Para la solución de problemas que muestren la información en diagramas lineales, en este grado apliquen el método de operaciones con números fraccionarios. *Por ejemplo, dadas diferentes medidas de un líquido contenido en vasos de precipitado idénticos, hallen la cantidad de líquido que cada uno de ellos podría contener si la cantidad total en los dos recipientes se distribuyera por partes iguales.*

### C. Medida geométrica: aprendan los conceptos de volumen y descríbanlos con operaciones de multiplicación y adición.

- Identifiquen el concepto de volumen como una propiedad de las figuras geométricas con tres dimensiones, y hagan ejercicios con medidas de volumen.
  - Un cubo cuyos lados tengan longitud igual a 1, que llamaremos "una unidad cúbica", tiene "una unidad cúbica" de volumen y puede utilizarse como unidad de medida de volumen.
  - Una figura con tres dimensiones que puede ser comprendida por  $n$  unidades cúbicas colocadas sin espacios ni superposición, se dice que tiene un volumen de  $n$  unidades cúbicas.
- Hallen valores de volumen aplicando el método de conteo de unidades cúbicas dadas en centímetros cúbicos, pulgadas cúbicas y en cualquier otra medida.
- Practiquen el concepto de volumen con operaciones de multiplicación y adición, y resuelvan problemas cotidianos y de tipo matemático que lo consideren.
  - Hallen el volumen de un prisma rectangular recto que tenga la longitud de todos sus lados expresada en números enteros, llenándolo con unidades cúbicas. Demuestren que su volumen es el mismo al que se calcula con la multiplicación de la longitud de sus aristas, de la misma forma como se encuentra

<sup>1</sup> Los/as estudiantes que dominan en general la multiplicación de números fraccionarios pueden desarrollar métodos generalizados, para dividir fracciones con base en la relación entre la multiplicación y la división. Pero la división de un número fraccionario por otro, no es requisito para este grado.

multiplicando su altura por el área de la base. Tipifiquen como medida de volumen los productos de números enteros multiplicados tres veces entre sí, que señalen por ejemplo la propiedad asociativa de la multiplicación.

- b. Para casos que muestren situaciones cotidianas y problemas matemáticos, hallen el volumen de prismas rectangulares rectos que tengan la longitud de sus aristas expresadas en números enteros, aplicando la fórmula para prismas rectangulares,  $V = l \times w \times h$  y  $V = b \times h$ .
- c. Entiendan el concepto de volumen como una situación de adición. Obtengan el volumen de figuras con tres dimensiones que contengan dos prismas rectangulares rectos no superpuestos, sumando las medidas de volumen de las partes que no se superponen. Apliquen este método para resolver problemas de la vida cotidiana.

## Geometría

## 5.G

### A. Grafiquen puntos en un plano cartesiano para solucionar problemas matemáticos y de la vida cotidiana.

1. Utilicen un par de líneas métricas perpendiculares entre sí —que reciben el nombre de ejes—, para definir un sistema de coordenadas que tengan el punto de intersección (origen) dispuesto de tal forma que coincida con un valor igual a 0, y señalen en el plano resultante un punto dado definido por un par de números que determinan sus coordenadas. Tengan en cuenta que el primer número del par señalado indica la distancia que hay desde el origen hasta un determinado punto en uno de los ejes, y el segundo indica la distancia que hay hasta un punto dado en el otro eje, entendiendo que los nombres de los dos ejes y sus coordenadas son correspondientes (es decir, que el eje de las  $x$  determina la coordenada  $x$ , y que el eje  $y$  determina la coordenada  $y$ ).
2. Trabajen con problemas matemáticos y de la vida cotidiana graficando puntos en el primer cuadrante del plano cartesiano e interpreten los valores de las coordenadas en el contexto de la situación dada.

### B. Clasifiquen en categorías las figuras bidimensionales de acuerdo con sus propiedades.

3. Tengan en cuenta que las propiedades típicas de cualquiera de las categorías de las figuras bidimensionales, también lo son de todas las subdivisiones de esa categoría. *Por ejemplo, todos los rectángulos tienen cuatro ángulos rectos y puesto que los cuadrados son formas rectangulares, también contienen cuatro ángulos rectos.*
4. Clasifiquen los cuadriláteros en secuencias que tengan en cuenta sus propiedades. (Los/as estudiantes deben entender una figura trapezoide, como un cuadrilátero que tiene por lo menos un par de lados paralelos).

## Matemáticas | 6º Grado

En el 6º grado, la enseñanza debe concentrarse en el cubrimiento de cuatro áreas fundamentales: (1) la correspondencia de las razones y las tasas con las operaciones de multiplicación y división de números enteros, y la aplicación de los conceptos de razones y tasas en la solución de problemas; (2) la culminación de su aprendizaje sobre división de números fraccionarios, y la ampliación de su conocimiento para incluir el sistema de números racionales, incluyendo los números negativos; (3) la escritura, representación y manejo de expresiones y ecuaciones matemáticas; y, (4) el aprendizaje de la lógica estadística.

(1) Los/as estudiantes aplican los procedimientos de multiplicación y división, para resolver problemas cuantitativos relacionados con razones y tasas. El enfoque de razones y tasas como productos y extensión de pares de filas asociadas (o columnas) en las tablas de multiplicación, además, el análisis de figuras sencillas que señalen la relatividad de las medidas cuantitativas, permite que los/as estudiantes relacionen sus conocimientos de la multiplicación y la división con razones y tasas. De esta forma los/as estudiantes amplían el alcance de los problemas que pueden ser resueltos aplicando operaciones de multiplicación y división, pudiendo así relacionar los conceptos de razones y tasas. De esta manera ellos/as pueden resolver una gran cantidad de problemas relacionados con razones y tasas.

(2) Los/as estudiantes aplican los fundamentos de los números fraccionarios, de la multiplicación y la división y además, de la ley entre la multiplicación y la división, para comprender y poder explicar la razón por la que son válidos los procedimientos para dividir números fraccionarios. Ellos/as aplican estas operaciones para solucionar problemas matemáticos. Amplían sus conocimientos previos sobre los números y su secuencia en todo el sistema de los números racionales, que incluyen números racionales negativos y en particular los enteros negativos. Ellos/as comprenden la secuencia y el valor absoluto de los números racionales, además de la ubicación de un punto dado en los cuatro cuadrantes del plano cartesiano.

(3) Los/as estudiantes aprenden la forma de utilizar las variables en las expresiones matemáticas. Determinan expresiones y ecuaciones que corresponden a condiciones conocidas, las evalúan y junto con las fórmulas, las aplican en la solución de problemas matemáticos. Comprenden que las expresiones en sus diferentes escrituras pueden ser equivalentes, y aplican las propiedades de las operaciones para replantearlas de esa forma. Los/as estudiantes saben que las diferentes soluciones de una ecuación, dependen de los valores de las variables que hacen válida tal ecuación. Ellos/as aplican las propiedades de las operaciones y el principio de conservación de la igualdad de una ecuación, para resolver ecuaciones sencillas que implican un solo paso. Los/as estudiantes elaboran y analizan tablas, como las de valores presentes en razones equivalentes, y utilizan ecuaciones (del tipo  $3x = y$ ) para describir equivalencias entre magnitudes.

(4) A partir de sus conocimientos numéricos y mediante un proceso de refuerzo, los/as estudiantes comienzan a desarrollar destreza en la lógica estadística. Ellos/as aprenden que una distribución de datos puede carecer de una tendencia central, y que de acuerdo con su forma de cálculo los resultados serán diferentes. El concepto de mediana determina una tendencia central, haciendo énfasis en un valor medio aproximado. La media calcula la tendencia central, considerando el valor que cada dato tendría si el total de valores de los datos se distribuyeran nuevamente de manera equitativa y además, considerándola como un punto de equilibrio. Los/as estudiantes aprenden que una medida de varianza (intervalo intercuartil o desviación media absoluta), también puede ser útil para la caracterización de los datos puesto que dos conjuntos totalmente diferentes, pueden tener medias y medianas iguales pero diferente varianza. Aprenden a plantear y resumir conjuntos de datos numéricos, identificar rangos de mayor concentración de datos, valores máximos, intervalos y simetría (sesgo), teniendo en cuenta el contexto en que los datos fueron recopilados.

Los/as estudiantes en el 6º grado también sacan provecho de sus conocimientos de primaria sobre el concepto de área, haciendo deducciones sobre las relaciones existentes entre las figuras geométricas para determinar medidas de área, área de superficies y volumen. Ellos/as hallan las áreas de triángulos rectángulos y de cuadriláteros particulares descomponiendo las figuras, reorganizando o eliminando piezas, y ajustando las figuras a los rectángulos. Mediante la aplicación de estos modelos los/as estudiantes analizan, desarrollan y aclaran fórmulas, para el cálculo de áreas de triángulos y paralelogramos. Encuentran áreas de polígonos y superficies de áreas de prismas y pirámides,

descomponiéndolos en secciones cuyas áreas pueden determinar por métodos conocidos. Analizan los prismas rectangulares rectos que tienen lados con longitudes dadas en números fraccionarios, para deducir fórmulas que les permita calcular el volumen de un prisma rectangular recto con esta característica. En el 7º grado aprenden a trabajar con dibujos a escala y montajes, utilizando gráficas de polígonos trazadas en el plano cartesiano.

## Relaciones entre razones y proporciones

## 6.RP

### A. Aprendan los conceptos de razón y apliquen su fundamento para resolver problemas matemáticos.

1. Aprendan el concepto de razón y utilicen su lenguaje para describir la relación de la razón entre dos magnitudes. *Por ejemplo, "La razón entre alas y picos en una pajarera del zoológico fue de 2:1, debido a que por cada 2 alas había un pico". "Por cada voto a favor del candidato A, el candidato C recibió casi tres."*
2. Aprendan el concepto de una tasa unitaria  $a/b$  relacionada con la razón  $a:b$  en donde  $b \neq 0$ , y utilicen su forma de expresión dentro del contexto de una relación de razón. *Por ejemplo, "Esta receta tiene una proporción (razón) de 3 tazas de harina por 4 tazas de azúcar, de tal manera que hay  $3/4$  de taza de harina por cada una de azúcar". "Nosotros pagamos \$75 por la compra de 15 hamburguesas, que nos da una proporción de \$5 por cada hamburguesa."*<sup>1</sup>
3. Apliquen su conocimiento sobre razones y tasas para solucionar problemas matemáticos y cotidianos; por ejemplo, argumentando sobre tablas de razones equivalentes, diagramas de cintas, diagramas con dos líneas numéricas o ecuaciones.
  - a. Elaboren tablas con razones equivalentes que relacionen magnitudes con medidas en números enteros, hallen valores faltantes en las tablas y grafiquen el par de valores sobre un plano cartesiano. Utilicen las tablas para comparar las razones.
  - b. Resuelvan problemas sobre tasas unitarias que incluyan precios unitarios y velocidad constante. *Por ejemplo, si la poda de 4 céspedes requirió 7 horas, ¿cuántos céspedes se podrán podar en 35 horas? ¿Cuál fue la tasa unitaria de poda?*
  - c. Hallen un porcentaje de una cantidad a una tasa de 100 (p. ej., 30% de una cantidad es equivalente a  $30/100$  veces dicha cantidad). Resuelvan problemas que requieran el cálculo de números enteros, conociéndose un valor y el porcentaje.
  - d. Apliquen su conocimiento sobre tasas para convertir unidades de medida; trabajen y transformen unidades de manera apropiada cuando multipliquen o dividan valores.

## El sistema numérico

## 6.NS

### A. Apliquen y amplíen los conocimientos adquiridos con anterioridad sobre la multiplicación y la división, para realizar operaciones de división entre números fraccionarios.

1. Entiendan y calculen los coeficientes de números fraccionarios y resuelvan problemas con enunciado verbal que consideren la división entre números fraccionarios, utilizando por ejemplo modelos visuales de fracciones y ecuaciones para plantear el problema. *Por ejemplo, desarrollen un caso que considere la operación  $(2/3) \div (3/4)$  y utilicen un modelo visual de fracciones para explicar el cociente; apliquen a la relación entre la multiplicación y la división de tal forma que se explique que,  $(2/3) \div (3/4) = 8/9$  porque  $3/4$  de  $8/9$  es igual a  $2/3$ . (Generalizando,  $(a/b) \div (c/d) = ad/bc$ .) ¿Cuánto chocolate recibirá cada persona, si 3 de ellas comparten  $1/2$  lb por partes iguales? ¿Cuántas porciones de  $3/4$  de taza hay en  $2/3$  de una taza de yogur? ¿Cuál es la superficie rectangular de una extensión de tierra que mide  $3/4$  de milla y un área de  $1/2$  milla cuadrada?*

<sup>1</sup> Los objetivos de este grado con respecto a las tasas unitarias se limitan a los números fraccionarios no complejos.



**B. Trabajen de manera rápida con números de varios dígitos para calcular factores comunes y múltiplos.**

2. Aplicando el algoritmo estándar, dividan con facilidad números que tengan varios dígitos.
3. Aplicando el algoritmo estándar para cada operación, sumen, resten, multipliquen y dividan con facilidad números decimales formados por varios dígitos.
4. Calculen el máximo factor común entre dos números enteros menores o iguales a 100, y el mínimo común múltiplo entre dos números menores o iguales a 12. Apliquen la propiedad distributiva para expresar una suma de dos números enteros entre 1 y 100, que tengan como factor común un múltiplo igual a la sumatoria de dos números enteros, que no tengan un factor común. *Por ejemplo, expresen  $36 + 8$  como  $4(9 + 2)$ .*

**C. Practiquen y amplíen sus conocimientos previos sobre los números, con el sistema de los números racionales.**

5. Deben aprender que los números positivos y negativos se utilizan conjuntamente para describir magnitudes que tienen una orientación o valores opuestos (es decir, temperaturas por encima o por debajo de cero, alturas por encima o por debajo del nivel de mar, dinero contabilizado como créditos o débitos, carga eléctrica positiva o negativa, etc. ); utilicen los números positivos o negativos para representar magnitudes que apliquen en las actividades cotidianas, explicando en cada situación la característica que determina el valor cero.
6. Consideren un número racional como un punto cualquiera sobre una recta numérica. Elaboren diagramas con rectas numéricas y utilicen gráficas con ejemplos de ejes coordenados desarrollados en grados anteriores, para representar números negativos como coordenadas de puntos sobre la línea numérica y reflejados en el plano.
  - a. Entiendan los signos opuestos de los números, como indicativos de una posición que se ocupa a ambos lados del valor cero de la línea numérica; observen que el valor opuesto del opuesto de una cantidad cualquiera corresponde al número mismo; por ejemplo,  $-(-3) = 3$  y que el valor 0 es su mismo valor opuesto.
  - b. Aprendan que el signo que lleva cada par numérico de coordenadas, indica el sitio que un punto ocupa en los diferentes cuadrantes del plano de coordenadas. Así mismo, que cuando se dan dos pares numéricos de coordenadas, éstos difieren únicamente por los signos que los acompañan y que las posiciones que señalan, se relacionan por su imagen refleja en uno o en ambos ejes.
  - c. Busquen y sitúen números enteros y otros números racionales en una gráfica con rectas numéricas horizontales o verticales; busquen y sitúen pares de números enteros y de otros números racionales en un plano de coordenadas (cartesiano).
7. Aprendan el ordenamiento y el valor absoluto de los números racionales.
  - a. Entiendan los enunciados sobre desigualdades, como aquellos que representan la posición relativa de dos números sobre un diagrama con recta numérica. *Por ejemplo, consideren la relación matemática  $-3 > -7$  como una expresión en la que el valor  $-3$ , esté situado a la derecha de  $-7$  en una recta numérica orientada de izquierda a derecha.*
  - b. Redacten, analicen y expliquen, enunciados que señalen el significado del orden en que se escriben los números racionales que sean comunes en la vida cotidiana. *Por ejemplo, escriban  $-3^{\circ}\text{C} > -7^{\circ}\text{C}$  para establecer que  $-3^{\circ}\text{C}$  es una temperatura más caliente que  $-7^{\circ}\text{C}$ .*
  - c. Aprendan el valor absoluto de un número racional, como la distancia que lo separa del valor 0 en una recta numérica; representen el valor absoluto como magnitud de una cantidad positiva o negativa en ejemplos aplicados a la vida cotidiana. *Por ejemplo, en un balance contable que dé  $-30$  dólares, escriban  $|-30| = 30$  para señalar el valor de la deuda en dólares.*
  - d. Diferencien las comparaciones del valor absoluto a partir de enunciados que contemplen un orden numérico establecido. *Por ejemplo, observen que un balance contable menor de  $-30$  dólares indica una deuda mayor de 30 dólares.*
8. Resuelvan problemas de tipo matemático y aplicados a la vida cotidiana, graficando puntos de coordenadas en los cuatro cuadrantes de un plano cartesiano. Contemplan el uso de coordenadas y valores absolutos, para encontrar distancias entre puntos que tengan igual la primera o la segunda coordenada.

## Expresiones y ecuaciones

## 6.EE

### A. Apliquen y amplíen los conocimientos adquiridos con anterioridad sobre expresiones aritméticas y algebraicas.

1. Escriban y analicen las expresiones numéricas que involucren exponentes de números enteros.
2. Escriban, lean y analicen, expresiones en las que aparezcan letras con valor numérico.
  - a. Escriban expresiones que registren operaciones con números y además, letras que representen números. *Por ejemplo, escriban la relación, "reste Y de 5", en la forma  $5 - y$ .*
  - b. Señalen en términos matemáticos las partes de una expresión (suma, término, factor, cociente, coeficiente, etc. ). Consideren una o más partes de una expresión como entidades únicas. *Por ejemplo, escriba la expresión  $2(8+7)$  como el producto de dos factores y, consideren el factor  $(8+7)$  tanto como entidad única como la suma de dos términos.*
  - c. Evalúen las expresiones de acuerdo con diferentes valores dados a las variables que las componen. Incluyan expresiones que tengan su origen en fórmulas adecuadas para la solución de problemas cotidianos. Realicen operaciones aritméticas incluyendo las que trabajan con exponentes de números enteros, en el orden convencional sin presencia de paréntesis que especifiquen un orden particular (Orden de las Operaciones). *Por ejemplo, apliquen las fórmulas  $V = s^3$  y  $A = 6s^2$ , para hallar el volumen y el área de la superficie de un cubo cuyos lados tengan de longitud  $s = 1/2$ .*
3. Pongan en práctica las propiedades de las operaciones para deducir expresiones equivalentes. *Por ejemplo, apliquen la propiedad distributiva en la expresión  $3(2 + x)$  para obtener su equivalente  $6 + 3x$ ; hagan lo mismo con la propiedad distributiva para aplicarla a la expresión  $24x + 18y$ , y obtener su equivalente  $6(4x + 3y)$ ; apliquen las propiedades de las operaciones a la expresión  $y + y + y$ , para obtener su equivalente  $3y$ .*
4. Señalen la situación en que dos expresiones sean equivalentes (por ejemplo, cuando las dos expresiones contengan el mismo número, sin tener en cuenta cuál de los valores se haya sustituido dentro de ellas). *Por ejemplo, tanto la expresión  $y + y + y$  como la expresión  $3y$  son equivalentes, porque mencionan el mismo número sin considerar el valor que tenga la letra  $y$ .*

### B. Analicen y resuelvan ecuaciones y desigualdades que tengan una sola variable.

5. Consideren la solución de una ecuación o desigualdad como un proceso de respuesta a una pregunta del tipo, ¿qué valores dentro de un conjunto específico, si es que hay alguno, hacen válida la ecuación o la desigualdad? Apliquen el método de sustitución, para determinar si un número dado dentro de un conjunto específico hace válida la ecuación o la desigualdad.
6. Utilicen variables para representar números y escriban expresiones relacionadas con problemas matemáticos o eventos de la vida cotidiana; aprendan que una variable puede representar un número desconocido o, dependiendo del objetivo que se pretenda, cualquier número dentro de un conjunto dado.
7. Resuelvan problemas matemáticos o relacionados con eventos cotidianos, escribiendo ecuaciones y desigualdades de la forma  $x + p = q$  y  $px = q$  para casos en los que  $p$ ,  $q$  y  $x$  sean números racionales no negativos. Las relaciones de desigualdad incluirán los signos  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ , y  $\geq$ .
8. Escriban una desigualdad de la forma  $x > c$  ó  $x < c$ , para representar una restricción o condición especial aplicadas a problemas matemáticos o eventos cotidianos. Observen que desigualdades de la forma  $x > c$  ó  $x < c$  tienen una cantidad infinita de soluciones, y representen algunas de esas soluciones mediante diagramas con rectas numéricas.

### C. Señalen y analicen las relaciones de tipo cuantitativo existentes entre variables dependientes e independientes.

9. Utilicen variables para representar dos magnitudes en alguna situación de la vida cotidiana, que cambien el tipo de relación que sostienen. Escriban una ecuación que determine una cantidad como variable dependiente y la otra como variable independiente. Analicen la relación entre las variables dependientes e independientes utilizando gráficas y tablas, y reflejen la situación en una ecuación. *Por ejemplo, en un problema sobre*



*desplazamiento a velocidad constante, relacionen y grafiquen los pares correspondientes a distancias y tiempos, enunciando la ecuación  $d = 65t$  para representar la relación entre distancia y tiempo.*

## Geometría

## 6. G

### A. Solucionen problemas de tipo matemático y de la vida cotidiana que involucren los conceptos de área, área de superficie y volumen.

1. Calculen el área de triángulos rectángulos, de otro tipo de triángulos, de tipos especiales de cuadriláteros y polígonos, aplicando el método de composición en formas rectangulares y descomposición en triángulos y otras formas; practiquen esta metodología para resolver problemas matemáticos y de la vida cotidiana.
2. Calculen mediante un diseño de relleno con unidades cúbicas cuyas aristas tengan longitud expresada en fracciones unitarias correspondientes, el área de un prisma rectangular recto con aristas que tengan su longitud en números fraccionarios y demuestren, que el volumen resultante es el mismo que se calcula multiplicando la longitud de las aristas del prisma. Para casos que muestren situaciones cotidianas y problemas matemáticos, hallen el volumen de prismas rectangulares rectos cuyas aristas tengan la longitud expresada en números fraccionarios, aplicando las fórmulas  $V = lwh$  y  $V = bh$ .
3. En un plano de coordenadas trace polígonos a partir de coordenadas conocidas para sus vértices; utilicen coordenadas para encontrar la longitud de los puntos de unión adyacentes, que tengan igual la primera o segunda coordenada. Practiquen esta metodología para resolver problemas matemáticos y de la vida cotidiana.
4. Representen figuras tridimensionales utilizando redes hechas con rectángulos y triángulos, y utilicen las redes formadas para hallar el área de superficie de las figuras. Practiquen esta metodología para resolver problemas matemáticos y de la vida cotidiana.

## Estadística y cálculo de probabilidad

## 6.SP

### A. Aprendan el concepto de variabilidad estadística.

1. Tengan en cuenta, que una pregunta en estadística pretende anticipar el grado de variabilidad de unos datos relacionados con esa pregunta, y que describe la situación en su respuesta. *Por ejemplo, la pregunta "¿Cuántos años tengo?" no es una cuestión estadística pero esta otra, "¿Qué edad tienen los estudiantes en mi colegio?" sí lo es, puesto que se espera una variabilidad en las edades de los estudiantes.*
2. Aprendan que un conjunto de datos recopilados para responder una pregunta de carácter estadístico, tiene siempre un tipo de distribución caracterizado por medidas como tendencia central, dispersión y forma general.
3. Tengan en cuenta que una medida de tendencia central para un conjunto de datos conocido resume todos los valores con un solo número, mientras que una medida de variación describe con un solo número la forma como cambian los diferentes valores del conjunto.

### B. Resuman y describan las distribuciones.

4. Representen datos numéricos en diagramas trazados sobre una recta numérica, que incluyan diagramas de puntos, histogramas y diagramas de recuadros.
5. Resuman los conjuntos de datos numéricos en relación con su contenido, de la siguiente manera:
  - a. Reportando el número de observaciones realizadas;
  - b. Describiendo la naturaleza de la propiedad que está siendo estudiada, incluyendo la manera como fue medida y sus unidades.
  - c. Ofreciendo medidas cuantitativas de tendencia central (como mediana y/o media) y variabilidad (rango intercuartil), así como describiendo patrones generales que se puedan presentar y desviaciones atípicas de tales patrones, con referencia al entorno en que los datos fueron recogidos.

- 
- d. Relacionando la selección de las medidas de tendencia central y de variabilidad de la forma de distribución de los datos, con el entorno en que los datos fueron recogidos.

## Matemáticas | 7º Grado

En el 7º grado, la enseñanza debe concentrarse en el cubrimiento de cuatro áreas fundamentales: (1) Aprendizaje y práctica de las razones de proporcionalidad; (2) aprendizaje de las operaciones con números racionales y práctica con expresiones y ecuaciones lineales; (3) solución de problemas que incluyan dibujos a escala y trazados geométricos sencillos, además de la práctica con figuras bidimensionales y tridimensionales para resolver problemas que consideren los conceptos de área, área de superficies y volumen; (4) representación de las conclusiones sobre las poblaciones, a partir de las muestras obtenidas.

(1) Los/as estudiantes amplían su conocimiento sobre las razones y aprenden el concepto de proporcionalidad para resolver problemas que se desarrollan siguiendo uno y varios pasos. Aplican su conocimiento sobre las razones y el concepto de proporcionalidad para resolver una gran variedad de problemas sobre porcentajes, incluyendo descuentos, intereses, impuestos, compensaciones y aumento o disminución de porcentajes. Resuelven problemas sobre dibujos a escala, relacionando longitudes correspondientes entre los objetos o mediante la aplicación del concepto, que las longitudes dentro de un objeto se conservan en objetos semejantes. Los/as estudiantes grafican las razones de proporcionalidad y, aprenden de manera sencilla el concepto de tasa unitaria como medida de la inclinación de la línea resultante, llamada pendiente. Aprenden a hacer diferencia entre las razones de proporcionalidad y otro tipo de relaciones matemáticas.

(2) Desarrollan una comprensión uniforme sobre el número, el reconocimiento de números fraccionarios y decimales (que tengan una representación finita o de decimales repetidos) y los porcentajes, como diferentes formas de números racionales. Amplían sus conocimientos de las operaciones de adición, multiplicación y división, a su práctica con todos los números racionales, conservando las propiedades de las operaciones y las relaciones entre la adición y la sustracción, y entre la multiplicación y la división. Mediante la aplicación de estas propiedades y a través de la comprensión de los números negativos aplicados a eventos cotidianos (p. ej., la representación de valores adeudados o las temperaturas bajo cero), los/as estudiantes determinan e interpretan las reglas de la adición, la sustracción, la multiplicación y la división con números negativos. Aplican las propiedades aritméticas de los números racionales, cuando escriben expresiones y ecuaciones de una variable y las aplican en la solución de problemas.

(3) Avanzan en el trabajo con áreas que comenzaron en el 6º grado, resolviendo problemas que consideran el área y la circunferencia de un círculo y además, el área de la superficie de objetos tridimensionales. Como preparación para su trabajo sobre congruencia y semejanza en 8º grado, los/as estudiantes aprenden las relaciones existentes entre figuras geométricas bidimensionales utilizando dibujos a escala y construcciones geométricas sencillas, familiarizándose con las relaciones existentes entre los ángulos formados por líneas intersecantes. Trabajan con figuras tridimensionales, relacionándolas con figuras bidimensionales a través del estudio de secciones transversales. Resuelven problemas de tipo matemático y aplicados a la vida cotidiana que consideran los conceptos de área, de áreas de superficie y de volumen de objetos bidimensionales y tridimensionales, compuestos por triángulos, cuadriláteros, polígonos, cubos y prismas rectangulares.

(4) Utilizan el conocimiento adquirido sobre distribuciones con un solo grupo de datos, para poder comparar distribuciones con dos grupos de datos y resolver preguntas sobre las diferencias entre sus poblaciones. Comienzan el trabajo elemental con un muestreo aleatorio para generar conjuntos de datos, y aprender sobre la trascendencia de las muestras representativas en el trazado de las conclusiones.

## Relaciones entre razones y proporciones

## 7. RP

### A. Grafiquen razones de proporcionalidad y aplíquenlas en la solución de problemas matemáticos y de la vida cotidiana.

1. Calculen las tasas unitarias relacionadas con coeficientes de números fraccionarios que incluyan razones de longitud, áreas y otras magnitudes, medidas en unidades similares o diferentes. *Por ejemplo, si una persona camina  $1/2$  milla cada  $1/4$  de hora, calculen la tasa unitaria a partir de la fracción compleja  $1/2 / 1/4$  millas por hora, equivalente a dos millas por hora.*

2. Identifiquen y representen las razones de proporcionalidad ente las magnitudes.
  - a. Determinen si dos magnitudes tienen razón de proporcionalidad, por ejemplo comprobando las razones equivalentes en una tabla o haciendo una gráfica en un plano de coordenadas cartesianas, para observar si la gráfica resultante es una línea recta que pasa por el origen.
  - b. Determinen la constante de proporcionalidad (tasa unitaria) en tablas, gráficas, ecuaciones, diagramas y enunciados orales, que muestren las relaciones de proporcionalidad.
  - c. Representen las razones de proporcionalidad mediante ecuaciones. *Por ejemplo, si el costo total es proporcional al número  $n$  de elementos comprados al precio constante  $p$ , la razón entre el coste total y el número de elementos se puede expresar en la forma  $t = pn$ .*
  - d. Expliquen el significado de un punto  $(x, y)$  en la gráfica de razón de proporcionalidad, poniendo especial atención en los puntos  $(0, 0)$  y  $(1, r)$  donde  $r$  representa la tasa unitaria.
3. Apliquen las razones de proporcionalidad para solucionar problemas de varios pasos en el cálculo de razones y porcentajes, considerando valores de interés, impuestos, márgenes y descuentos comerciales, propinas y comisiones, honorarios, aumento y disminución de porcentajes y error porcentual.

## El sistema numérico

## 7. NS

### A. Practiquen y amplíen los conocimientos adquiridos anteriormente sobre las operaciones con números fraccionarios, para sumar, restar, multiplicar y dividir números racionales.

1. Practiquen y amplíen los conocimientos sobre adición y sustracción para sumar y restar números racionales. Representen las operaciones de adición y sustracción en un diagrama de recta numérica horizontal o vertical.
  - a. Determinen situaciones en las que magnitudes contrarias se combinen, para dar como resultado el valor 0. *Por ejemplo, un átomo de hidrógeno tiene carga 0 debido a que sus componentes tienen cargas contrarias.*
  - b. Consideren  $p + q$  como el valor absoluto de la distancia  $|q|$  desde  $p$ , en dirección positiva o negativa dependiendo de que  $q$  sea positiva o negativa. Demuestren que un número y su valor contrario suman 0 (inversos aditivos). Practiquen sumas de números racionales aplicados a situaciones de la vida cotidiana.
  - c. Consideren la sustracción de números racionales como la adición de números opuestos,  $p - q = p + (-q)$ . Demuestren que la distancia entre dos números racionales sobre una recta numérica equivale al valor absoluto de su diferencia, y apliquen este principio a situaciones de la vida cotidiana.
  - d. Pongan en práctica las propiedades de las operaciones, aplicándolas como métodos para sumar y restar números racionales.
2. Apliquen y amplíen los conocimientos adquiridos con anterioridad sobre la multiplicación y la división, para realizar operaciones de multiplicación y división de fracciones.
  - a. Observen que la multiplicación se ha extendido de los números fraccionarios a los racionales, basados en la condición de que las operaciones continúen satisfaciendo sus propiedades, particularmente la propiedad distributiva, dando lugar a productos tales como  $(-1)(-1) = 1$ , y a las leyes de la multiplicación de números caracterizados por signos. Practiquen productos de números racionales aplicados a situaciones cotidianas.
  - b. Observen que los números enteros pueden dividirse siempre y cuando el divisor sea diferente a 0, y que cada cociente resultante de números enteros (con divisor diferente a 0) será un número racional. Si  $p$  y  $q$  representan números enteros, entonces  $-(p/q) = (-p)/q = p/(-q)$ . Practiquen el cálculo de cocientes de números racionales, tomando como ejemplo situaciones cotidianas.
  - c. Pongan en práctica las propiedades de las operaciones, aplicándolas como métodos para multiplicar y dividir números racionales.
  - d. Conviertan un número racional a decimal utilizando el método largo de división; observen que la forma decimal de un número racional termina en 0 o se repite ocasionalmente.

- Resuelvan problemas matemáticos y de la vida cotidiana, que consideren las cuatro operaciones con números racionales.<sup>1</sup>

## Expresiones y ecuaciones

## 7. EE

### A. Pongan en práctica las propiedades de las operaciones para deducir expresiones equivalentes.

- Practiquen las propiedades de las operaciones como métodos para sumar, restar, factorizar y expandir expresiones lineales con coeficientes racionales, permitiendo la inclusión de símbolos múltiples de agrupación (p. ej. , paréntesis, corchetes y llaves).
- Observen que replantear una expresión en diferentes formas dentro del contexto de un problema, puede ayudar a comprender el problema y la forma como se relacionan las magnitudes consideradas en él. *Por ejemplo, la ecuación  $a + 0,05a = 1,05a$  nos indica que "el incremento de un 5%" es igual a "multiplicar por 1,05".*

### B. Resuelvan problemas de tipo matemático y de la vida cotidiana, aplicando ecuaciones y expresiones de tipo numérico y algebraico.

- Aplicando las herramientas apropiadas, resuelvan problemas de tipo matemático y de la vida cotidiana que impliquen varios pasos, e incluyan números racionales positivos y negativos en cualquiera de sus formas (números enteros, fraccionarios y decimales). Practiquen las propiedades de las operaciones para hacer cálculos con números en cualquiera de sus formas. Hagan conversiones convenientes entre las diferentes formas y evalúen la validez de las respuestas recurriendo a métodos de cálculo mental y de aproximación. *Por ejemplo: Si una señora que se gana \$25 en una hora logra un incremento del 10%, podrá aumentar en 1/10 su salario por hora, ó lo que es igual a \$2,50, para obtener un nuevo salario de \$27,50. Si se desea colocar una barra para toalla que mide  $9\frac{3}{4}$  pulgadas de largo en el centro de una puerta que mide  $27\frac{1}{2}$  pulgadas de ancho, será necesario colocar la barra aproximadamente a 9 pulgadas de distancia de cada extremo. Esta aproximación puede aplicarse a modo de comprobación de un cálculo exacto.*
- Utilicen variables para representar valores en problemas de tipo matemático o de la vida cotidiana y, desarrollen ecuaciones y desigualdades sencillas para resolver problemas argumentando sobre esos valores.
  - Resuelvan problemas que tengan enunciado verbal y conduzcan a ecuaciones de la forma  $px + q = r$  y  $p(x + q) = r$ , donde  $p$ ,  $q$ , y  $r$  equivalen a determinados números racionales. Resuelvan con agilidad este tipo de ecuaciones. Comparen una solución algebraica con una matemática y, determinen la secuencia de las operaciones en cada método. *Por ejemplo, un rectángulo tiene 54 cm de perímetro y 6 cm de longitud; ¿Cuánto mide de ancho?*
  - Resuelvan problemas que lleven a desigualdades de la forma,  $px + q > r$ ,  $px + q \geq r$ ,  $px + q < r$  or  $px + q \leq r$ , donde  $p$ ,  $q$ , y  $r$  equivalen a determinados números racionales. Grafiquen la desigualdad encontrada y explíquenla de acuerdo con el planteamiento del problema. *Por ejemplo: Usted recibe como vendedor la suma de \$50 a la semana, más \$3 de comisión por cada venta. Durante la semana que corre usted desea ganar por lo menos \$100. Escriban una desigualdad que represente el valor de las ventas que ustedes tiene que hacer y, planteen las posibles soluciones.*

## Geometría

## 7.G

### A. Dibuje, elabore y describa figuras geométricas señalando las relaciones entre ellas.

- Resuelvan problemas que involucren dibujos a escala de figuras geométricas, que planteen el cálculo de longitudes y áreas a partir de dichas escalas y además, reproduzcan dibujos a escala con escalas diferentes.
- Tracen (a mano alzada, utilizando regla y transportador o cualquier medio tecnológico) figuras geométricas con condiciones conocidas. (Hagan énfasis en triángulos obtenidos con tres medidas diferentes para los ángulos o

<sup>1</sup> Los cálculos con números racionales proyectan las leyes sobre manejo de números fraccionarios, a fracciones complejas.

los lados, y observen en qué momento las condiciones dadas determinan uno y solo uno de los triángulos, más de uno o ninguno).

3. Describan las figuras bidimensionales que resultan del corte de figuras tridimensionales, considerándolas como secciones planas de prismas y pirámides rectangulares rectos.

**B. Solucionen problemas de tipo matemático y de la vida cotidiana que involucren medidas de ángulos, de áreas, de áreas de superficie y volumen.**

4. Aprendan las fórmulas y aplíquenlas en la solución de problemas sobre cálculo del área o la circunferencia de un círculo; hagan algunas deducciones sencillas de la relación entre la circunferencia y el área de un círculo.
5. Planteen un problema de varios pasos utilizando las propiedades de los ángulos suplementarios, complementarios, verticales y adyacentes, y aplíquenlas para resolver ecuaciones sencillas con ángulos desconocidos en una figura geométrica.
6. Resuelvan problemas de tipo matemático y aplicados a la vida cotidiana que consideren los conceptos de área, volumen y áreas de superficie de objetos bidimensionales y tridimensionales, compuestos por triángulos, cuadriláteros, polígonos, cubos y prismas rectangulares. (En el caso de pirámides limiten los cálculos a áreas de superficies).

## Estadística y cálculo de probabilidad

## 7.SP

**A. Apliquen el método de muestreo aleatorio para representar conclusiones sobre una población dada.**

1. Tengan en cuenta que las estadísticas sirven para obtener mayor información sobre poblaciones de datos a través del análisis de muestras; las generalizaciones sobre las poblaciones a partir de una muestra, son válidas únicamente si la muestra es representativa de la población en estudio. Observen que el resultado natural de un muestreo aleatorio es generar muestras representativas y, servir de soporte para las conclusiones válidas que se hagan.
2. Utilicen los datos obtenidos a partir de una muestra aleatoria, para obtener conclusiones de una población de datos de la que se desconozca una de sus características importantes. Obtengan múltiples muestras reales (o muestras simuladas) del mismo tamaño, para medir la variación de los resultados o predicciones esperadas. *Por ejemplo, calculen la extensión promedio de las palabras que hay en un libro, haciendo un muestreo aleatorio de las palabras contenidas. Hagan predicciones del ganador/a en una elección dentro del colegio, a partir de datos obtenidos de una encuesta realizada en una muestra aleatoria. Determinen la desviación de los resultados o estimaciones esperadas.*

**B. Hagan un comparativo gráfico sencillo entre las conclusiones obtenidas sobre dos poblaciones.**

3. Evalúen de manera sencilla el grado de superposición visual de dos distribuciones de datos numéricos que tengan variables similares, utilizando medidas cuantitativas de tendencia central (como mediana y/o media) y de su variabilidad (rango intercuartil y/o desviación absoluta), así como describiendo patrones generales que se puedan presentar y desviaciones atípicas de tales patrones, con referencia al entorno en que los datos fueron recogidos.
4. Utilicen las medidas de tendencia central y de variabilidad de datos numéricos obtenidos de muestras aleatorias, para hacer gráficos sencillos comparativos de las conclusiones obtenidas sobre dos poblaciones de datos. *Por ejemplo, determinen si la cantidad de palabras que se encuentran en el capítulo de un libro de ciencias para séptimo grado, es generalmente mayor que el número de palabras del capítulo de un libro de ciencias para cuarto grado.*



**C. Estudien los procesos estocásticos y desarrollen, apliquen y evalúen, modelos de probabilidad.**

5. Aprendan que la probabilidad de incidencia de un evento casual es un número entre 0 y 1, que expresa la posibilidad de que tal circunstancia ocurra. Entre más alto sea el valor de los números, mayor es la probabilidad de incidencia. Una probabilidad cercana a 0 señala un evento de ocurrencia remota; una probabilidad que se sitúe alrededor de  $1/2$  indica un evento con iguales oportunidades de ocurrencia o no ocurrencia y, una probabilidad cercana a 1 muestra una circunstancia de ocurrencia probable.
6. Determinen la probabilidad de ocurrencia de un evento casual recopilando datos obtenidos del proceso estocástico que lo produce y, analizando su frecuencia relativa de largo plazo para dar un pronóstico aproximado de frecuencia relativa, a partir del índice de probabilidad encontrado. *Por ejemplo, hagan la predicción de que los números 3 y 6 se repetirán alrededor de 200 veces cuando se lanza un dado 600 veces, aunque probablemente no exactamente 200.*
7. Desarrollen un modelo de probabilidad y aplíquelo para hallar diversas posibilidades de ocurrencia. Comparen índices de probabilidad a partir de un modelo de frecuencias observadas; si la coincidencia no es buena, expliquen las posibles causas de la discrepancia.
  - a. Desarrollen un modelo de probabilidad uniforme determinando iguales oportunidades de ocurrencia para todas las posibilidades, y apliquen el modelo para determinar las probabilidades de ocurrencia de diferentes eventos. *Por ejemplo, si en un curso se selecciona un/a estudiante de manera aleatoria, hallen la probabilidad de que Jane sea escogida y la probabilidad de que la elegida sea una niña.*
  - b. Desarrollen un modelo de probabilidad (no necesariamente uniforme), observando las frecuencias presentes en un conjunto de datos generados a partir de un proceso estocástico. *Por ejemplo, hallen el índice aproximado de probabilidad de que lanzados al aire, un penique caiga en cara o, de que un vaso de cartón caiga con el extremo abierto hacia abajo. Con base en la frecuencias observadas, ¿creen ustedes que los resultados que arroje el lanzamiento del penique al aire, tengan la misma probabilidad de ocurrencia?*
8. Hallen las probabilidades de ocurrencia de eventos compuestos utilizando listas organizadas, tablas, diagramas de árbol y el método de simulación.
  - a. Observen que de la misma manera que sucede con los eventos simples, la probabilidad de ocurrencia de un evento compuesto es igual a una fracción de los resultados que se den, en el intervalo de la muestra para la que el evento compuesto ocurre.
  - b. Representen los intervalos de la muestra correspondiente a eventos compuestos, aplicando métodos semejantes a listas organizadas, tablas y diagramas de árbol. Para un evento descrito en términos coloquiales (p. ej. , "sacar doble seis"), determinen los resultados posibles dentro del intervalo de la muestra, que hacen posible tal evento.
  - c. Diseñen y apliquen un modelo de simulación para generar datos de frecuencia de eventos compuestos. *Por ejemplo, utilicen dígitos seleccionados de manera aleatoria como herramienta de simulación , para dar una respuesta tentativa a la pregunta: ¿Si el 40% de un conjunto de donantes tiene tipo de sangre A, ¿cuál es la probabilidad de que se necesiten 4 donantes por lo menos para encontrar uno con ese tipo de sangre?*

## Matemáticas | 8º Grado

En el 8º grado, la enseñanza debe concentrarse en el cubrimiento de tres áreas fundamentales: (1) Formulación y análisis de expresiones y ecuaciones, incluyendo desarrollo de modelos para una asociación con datos de dos variables en una ecuación lineal y, solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales; (2) comprensión del significado de función y aplicación de funciones para describir relaciones cuantitativas; (3) análisis de intervalos y figuras bidimensionales y tridimensionales aplicando conceptos de distancia, ángulos, semejanza y congruencia y además, aprendizaje y aplicación del Teorema de Pitágoras.

(1) Los/as estudiantes desarrollan las ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales para representar, analizar y solucionar, una gran variedad de problemas. Ellos/as reconocen las ecuaciones que reflejan proporciones del tipo ( $y/x = m$  ó  $y = mx$ ), como casos especiales de ecuaciones lineales ( $y = mx + b$ ), al tiempo que saben que ( $m$ ) es la pendiente y que las gráficas resultantes son líneas que pasan por el origen de un plano cartesiano. Saben que la pendiente ( $m$ ) de una línea cualquiera tiene un índice de variación constante, de tal forma que si el valor dado en el eje de las  $x$  cambia de una manera constante  $A$ , el valor del cambio correspondiente en el eje de las  $y$  estará dado por  $m \cdot A$ . Los/as estudiantes aplican una ecuación lineal, para representar la relación entre dos magnitudes de un conjunto de datos con dos variables (como la extensión de los brazos frente a la altura de los estudiantes en un salón de clases). En este nivel de educación, el ajuste y la evaluación de la precisión del modelo con respecto a los datos se hace de una manera sencilla. La interpretación del modelo teniendo en cuenta el contexto de los datos, exige que los/as estudiantes sepan expresar la relación existente entre las dos cantidades en cuestión, e interpretar los componentes de la relación (como por ejemplo, el valor de la pendiente y de su punto de intersección en  $y$ ) en términos de la situación dada.

Los/as estudiantes buscan de manera estratégica e implementan eficientemente procedimientos para solucionar ecuaciones lineales con una variable, sabiendo que cuando aplican las propiedades de la igualdad y el concepto de equivalencia lógica, se conservan las soluciones de la ecuación original. Los/as estudiantes resuelven sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables, y relacionan los sistemas de pares de líneas en el plano de coordenadas; estas se intersecan, son paralelas o representan la misma línea. Aplican los conceptos de ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales, funciones lineales y su conocimiento de la pendiente de una línea, para analizar situaciones y resolver problemas.

(2) Los/as estudiantes asimilan el concepto de función, como una fórmula que asigna a cada dato de entrada un solo dato de salida. Entienden que las funciones describen situaciones en las que un valor dado determina el otro. Pueden cambiar entre representaciones y representaciones parciales de las funciones (teniendo en cuenta que las representaciones tabulares y gráficas pueden ser representaciones parciales), y describen la forma como las características de la función se reflejan en las diferentes representaciones.

(3) Los/as estudiantes aplican las nociones sobre distancia y ángulos, la forma como se comportan en situaciones de traslación, rotación, simetría axial y dilatación, además de las ideas sobre congruencia y semejanza, para describir y analizar figuras bidimensionales y resolver problemas. Saben demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo es igual al ángulo que forma una línea recta y además, que diferentes disposiciones de líneas dan origen a triángulos iguales, debido a los ángulos que se forman cuando una línea transversal interseca líneas paralelas. Aprenden el enunciado del Teorema de Pitágoras y su recíproco y además, pueden explicar la razón por la que este teorema tiene validez por ejemplo, en la descomposición de un cuadrado por dos métodos diferentes. Aplican el Teorema de Pitágoras para hallar las distancias entre puntos ubicados en el plano cartesiano, para calcular longitudes y para analizar polígonos. Los/as estudiantes terminan su trabajo sobre el concepto de volumen solucionando problemas relacionados con conos, cilindros y esferas.

### El sistema numérico

### 8.NS

#### A. Entiendan que hay números que no son racionales y hagan una aproximación a números racionales.

1. Aprendan que los números no racionales se llaman irracionales. Aprendan en principio que cada número tiene una expresión decimal. Demuestren que en el caso de los números racionales su expresión decimal se repite ocasionalmente. Recurriendo al análisis de patrones recurrentes, conviertan en número racional una expresión decimal que se repita ocasionalmente.

2. Apliquen aproximaciones racionales de números irracionales para comparar el valor de números irracionales; sitúenlos de manera aproximada en un diagrama de recta numérica y calculen el valor de la expresión (p. ej. ,  $\pi^2$ ). *Por ejemplo, ajustando la secuencia de la expresión decimal equivalente a  $\sqrt{2}$ , demuestren que  $\sqrt{2}$  tiene un valor que se sitúa entre 1 y 2, luego entre 1,4 y 1,5, y expliquen la forma de continuar así para lograr mejores aproximaciones hasta la notación centesimal.*

## Expresiones y ecuaciones

## 8.EE

### A. Trabajen con radicales y exponentes enteros.

1. Aprendan y practiquen las propiedades de los exponentes enteros para generar expresiones numéricas equivalentes. *Por ejemplo,  $3^2 \times 3^{-5} = 3^{-3} = 1/3^3 = 1/27$ .*
2. Utilicen los símbolos para raíces cuadradas y cúbicas, con el fin de representar soluciones a ecuaciones de la forma,  $x^2 = p$  y  $x^3 = p$ , donde  $p$  es un número racional positivo. Evalúen raíces cuadradas de cuadrados perfectos pequeños y raíces cúbicas de cubos perfectos pequeños. Aprendan que  $\sqrt{2}$  es un número irracional.
3. Utilicen números expresados en forma de dígitos sencillos elevados a potencias enteras de 10, para estimar cantidades muy grandes o muy pequeñas y también, para expresar cuántas veces mayor es una cantidad que otra. *Por ejemplo, expresen la población de los Estados Unidos de la forma,  $3 \times 10^8$  y la población mundial como  $7 \times 10^9$ , y observen que esta última es 20 veces mayor que la primera.*
4. Realicen operaciones con números expresados en notación científica, incluyendo problemas en los que se utilice tanto la notación decimal como científica. Utilicen la notación científica y escojan unidades de tamaño apropiado, para hacer cálculos con magnitudes muy grandes o muy pequeñas (p. ej. , utilicen milímetros por año para señalar la expansión del lecho marino). Interpreten la notación científica que ha producido el campo de la tecnología.

### B. Aprendan las conexiones entre las razones de proporcionalidad, las líneas y las ecuaciones lineales.

5. Grafiquen las razones de proporcionalidad y consideren la tasa unitaria como la pendiente de la gráfica. Comparen dos razones de proporcionalidad diferentes expresadas de manera diferente. Por ejemplo, comparen una gráfica de distancia en función del tiempo, con una ecuación para esa misma relación, con el fin de determinar cuál de dos objetos en movimiento se desplaza a mayor velocidad.
6. Utilicen triángulos iguales para explicar la razón por la que el valor de la pendiente  $m$ , es el mismo entre dos puntos distintos ubicados en una línea no vertical del plano de coordenadas, y deriven la ecuación  $y = mx$  para una línea que pase por el origen de las coordenadas y la ecuación  $y = mx + b$ , para una línea que corte el eje vertical en el punto  $b$ .

### C. Analicen y resuelvan ecuaciones lineales y sistemas de dos ecuaciones lineales simultáneas.

7. Resuelvan ecuaciones lineales con una sola variable.
  - a. Den ejemplos de ecuaciones lineales con una sola variable y que se resuelvan en un solo paso, que tengan infinita cantidad de soluciones o, que no tengan solución. Demuestren cuál de las siguientes posibilidades es la correcta, simplificando sucesivamente la ecuación dada hasta lograr una ecuación equivalente de la forma,  $x = a$ ,  $a = a$ , ó,  $a = b$  (donde  $a$  y  $b$  son diferentes).
  - b. Resuelvan ecuaciones lineales que tengan coeficientes racionales, incluyendo aquellas cuyas soluciones exijan un desarrollo recurriendo a la ley distributiva y, al método de agrupación de términos comunes.
8. Analicen y resuelvan sistemas de dos ecuaciones lineales simultáneas.
  - a. Aprendan que las soluciones para un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables coinciden con puntos de intersección en sus gráficas, debido a que estos puntos satisfacen ambas ecuaciones de manera simultánea.
  - b. Resuelvan algebraicamente sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables y calculen sus soluciones mediante gráficas. Resuelvan casos sencillos mediante un simple reconocimiento. *Por ejemplo, las*

ecuaciones  $3x + 2y = 5$  y  $3x + 2y = 6$  no tienen solución, debido a que  $3x + 2y$  no puede tomar los valores 5 y 6 de manera simultánea.

- c. Resolver problemas matemáticos y de la vida cotidiana, que resulten en un sistema de dos ecuaciones con dos variables. *Por ejemplo, dadas las coordenadas de dos pares de puntos, determinen si la línea que pasa por el primero de ellos corta la línea que pasa por el segundo par.*

## Funciones

## 8. F

### A. Definan, evalúen y comparen funciones.

1. Aprendan que una función es una fórmula que asigna a cada dato de entrada un dato de salida. El gráfico de una función es el conjunto de pares ordenados, integrados por un dato de entrada y otro correspondiente de salida. (El aprendizaje de la notación de las funciones no se exige en este grado).
2. Comparen las propiedades de dos funciones que se representan cada una de manera diferente (algebraicamente, gráficamente, numéricamente en forma de tablas o por enunciados orales). *Por ejemplo, dada una función lineal representada en una tabla de valores y una función lineal representada por una expresión algebraica, determinen cuál de ellas tiene el mayor índice de variación.*
3. Tomen la ecuación  $y = mx + b$  como la definición de una ecuación lineal cuya representación gráfica es una línea recta. Clasifiquen las funciones como lineales o no lineales cuando se den ecuaciones, gráficas o tablas. *Por ejemplo, la función  $A = s^2$  que define el área de un cuadrado en función de su lado, no es lineal porque su gráfica incluye los puntos (1,1), (2,4) y (3,9), que no están ubicados sobre una línea recta.*

### B. Apliquen el concepto de función para hacer modelos de la relación entre magnitudes.

4. Desarrollen una función que describa la relación lineal entre dos cantidades. Determinen el índice de variación y el valor inicial de la función a partir de la descripción de una relación o de dos valores conocidos ( $x$ ,  $y$ ) o también, de la lectura de los valores en una tabla o a partir de una gráfica. Expliquen el índice de variación y el valor inicial de una función lineal, en términos de la situación que plantea, de su gráfica o de una tabla de valores.
5. Mediante el análisis de una gráfica describan de forma cualitativa la relación funcional entre dos cantidades (p. ej. , en qué punto la función crece o decrece, si es lineal o no lineal). Tracen una gráfica que muestre las propiedades cualitativas de una función planteada como enunciado verbal.

## Geometría

## 8. G

### A. Aprendan los conceptos de congruencia y semejanza recurriendo a modelos físicos, transparencias o programas de software.

1. Comprueben de manera experimental las propiedades de rotación, simetría axial y traslación:
  - a. Las líneas se transfieren a líneas y los segmentos de líneas a segmentos de líneas de igual longitud.
  - b. Los ángulos se transfieren a ángulos de la misma medida.
  - c. Las líneas paralelas se transfieren a líneas paralelas.
2. Expliquen que una figura bidimensional es congruente con otra si la segunda de ellas se puede obtener a partir de la primera, mediante una secuencia de rotaciones, de simetría axial y de traslaciones. Dadas dos figuras congruentes, describan una secuencia que muestre la congruencia entre ellas. (En 8º grado solo se ven las rotaciones sobre el punto de origen, y la simetría axial solamente sobre el eje de las  $y$ , y el eje de las  $x$ ).
3. A partir de coordenadas conocidas, describan en las figuras bidimensionales el efecto de las dilataciones, las traslaciones, las rotaciones y la simetría axial. (En 8º grado solo se ven las rotaciones sobre el punto de origen, las dilataciones solo utilizan el punto de origen como centro, y la simetría axial solamente sobre el eje de las  $y$ , y el eje de las  $x$ ).
4. Expliquen la razón por la que una figura bidimensional es semejante a otra si la segunda de ellas se puede obtener a partir de la primera, mediante una secuencia de rotaciones, de simetría axial, de traslaciones y

dilataciones. Dadas dos figuras bidimensionales semejantes, describan una secuencia que muestre la semejanza entre ellas. (En 8º grado solo se ven las rotaciones sobre el punto de origen, las dilataciones solo utilizan el punto de origen como centro, y la simetría axial solamente sobre el eje de las  $y$ , y el eje de las  $x$ ).

- Mediante argumentos sencillos señalen las propiedades de la adición de ángulos y el ángulo exterior de los triángulos, sobre ángulos formados cuando dos líneas paralelas se cortan por una línea transversal y, del criterio ángulo-ángulo para explicar la semejanza de los triángulos. *Por ejemplo, coloquen tres figuras idénticas de un mismo triángulo de tal forma que la suma de los tres ángulos se parezca a una línea, y presenten un argumento con base en el principio de líneas transversales para explicar la razón de este comportamiento.*

#### B. Aprendan y apliquen el Teorema de Pitágoras.

- Tomando como referencia el método de cálculo del área de figuras cuadradas, comprueben la validez del Teorema de Pitágoras y su recíproco.
- Apliquen este teorema para encontrar las longitudes en dos y tres dimensiones, de los lados de triángulos rectángulos aplicados a problemas de tipo matemático y de situaciones de la vida cotidiana.
- Apliquen el teorema de pitágoras, para encontrar la distancia entre dos puntos ubicados en un sistema de coordenadas.

#### C. Solucionen problemas de tipo matemático y de la vida cotidiana que involucren los conceptos de volumen de cilindros, conos y esferas.

- Aprendan las fórmulas para hallar el volumen de conos, cilindros y esferas, y aplíquenlas para resolver problemas de tipo matemático y de la vida cotidiana.

## Estadística y cálculo de probabilidad

## 8. SP

#### A. Estudien patrones de asociación en datos con dos variables.

- Elaboren e interpreten diagramas de dispersión para un conjunto de datos con dos variables, con el fin de investigar los patrones de asociación presentes entre las cantidades. Describan patrones como agrupamiento, valores atípicos, asociaciones positivas o negativas, asociación lineal y no lineal.
- Aprendan que las líneas rectas se usan ampliamente para representar modelos de relaciones entre dos variables cuantitativas. Los diagramas de dispersión que sugieren una asociación de tipo lineal, dan una idea aproximada del ajuste de datos a una línea recta y evalúan un modelo de ajuste, a partir de la cercanía a una línea recta que muestran una serie de puntos señalados por datos.
- Apliquen la ecuación de un modelo lineal para resolver problemas con dos variables que consideren datos de mediciones, y den una explicación de la pendiente y del punto de intersección que muestran. *Por ejemplo, en un modelo lineal para un experimento biológico entiendan un valor de pendiente, por ejemplo de 1,5 cm/hr, como el crecimiento cada hora de 1,5 cm adicionales en la altura de una planta.*
- Aprendan que los patrones de asociación también se pueden ver en el campo de datos con dos variables, anotando en una tabla de doble entrada las frecuencias absolutas y relativas. Elaboren y expliquen una tabla de doble entrada que resuma los datos en dos categorías de variables obtenidas de los mismos objetos. Utilicen las frecuencias calculadas en filas o columnas, para describir una posible asociación entre las dos variables. *Por ejemplo, recojan información de los/as estudiantes en su salón de clase, sobre la existencia o ausencia de toque de queda en las horas nocturnas durante el período lectivo, y si se les deja tareas para realizar en el hogar. ¿Existe alguna evidencia de la tendencia a tener tareas para realizar en el hogar, por parte de quienes estén sujetos/as a toque de queda?*

## Número y cantidad

### El Sistema de los Números Reales

A1: N-RN

#### B. Apliquen las propiedades de los números racionales e irracionales.

3. Expliquen la razón por la que la adición o la multiplicación de dos números racionales da como resultado un número racional; la suma de un número racional y uno irracional resulta en un número irracional; y el producto de la multiplicación de un número racional diferente a cero y uno irracional, da un número irracional.

### Cantidades\*

A1: N-Q

#### A. Deduzcan de manera cuantitativa y utilicen unidades para resolver problemas.

1. Utilicen unidades como método para comprender problemas y orientar la solución de problemas que incluyan varios pasos; seleccionen y expliquen de manera coherente las unidades aplicadas en las fórmulas; seleccionen y den explicación a la escala y el punto de origen que aparecen en las presentaciones de gráficos y datos.
2. Definan cantidades adecuadas con el fin elaborar modelos descriptivos.
3. Seleccionen un nivel de exactitud adecuado para los límites de las medidas, en el momento de reportar magnitudes.

## Álgebra

### Análisis de estructuras en las expresiones matemáticas

A1: A-SSE

#### A. Interpreten la estructura de las expresiones matemáticas.

1. Interpreten las expresiones que representan una cantidad en términos de su contenido. ★
  - a. Interpreten las partes que integran una expresión tales como términos, factores y coeficientes.
  - b. Expliquen expresiones complejas considerando una o más de sus partes como entidades aisladas. *Por ejemplo, consideren la expresión  $P(1+r)^n$  como el producto de  $P$  multiplicado por un factor independiente de  $P$ .*
2. Utilicen la estructura de una expresión para identificar diferentes formas de replanteamiento. *Por ejemplo, conviertan  $x^4 - y^4$  en la expresión  $(x^2)^2 - (y^2)^2$ , quedando de esta manera planteada como una diferencia de cuadrados susceptible de factorizar en la forma  $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$ , ó también,  $2x^2 + 8x$  as  $(2x)(x) + 2x(4)$ , que se convierte en un polinomio cuyos términos están dados por el producto de monomios; aun más, el polinomio se puede factorizar para llegar a la expresión  $2x(x+4)$ .*

#### B. Escriban expresiones de formas equivalentes para la solución de problemas matemáticos.

3. Seleccionen y obtengan una forma equivalente de una expresión dada, para mostrar y describir las propiedades de la cantidad que implica la expresión. ★
  - a. Factoricen una expresión cuadrática para mostrar los ceros de la función que ella define.
  - b. Desarrollen el cuadrado de una expresión cuadrática, para mostrar el valor máximo o mínimo de la función que ella define.
  - c. Apliquen las propiedades de los exponentes para transformar expresiones en funciones exponenciales con exponentes enteros. *Por ejemplo, el crecimiento bacteriano puede ser representado por la ecuación  $f(t) = 3^{(t+2)}$  ó por,  $g(t) = 9(3^t)$  debido a que la expresión  $3^{(t+2)}$  puede ser replanteada como,  $(3^t)(3^2) = 9(3^t)$ .*

### Operaciones aritméticas con polinomios y expresiones racionales

A1: A-APR

#### A. Desarrollen operaciones aritméticas con polinomios.

1. Aprendan que los polinomios forman un sistema análogo a los números enteros, es decir, que se encuentran sujetos a las operaciones de adición, sustracción y multiplicación. Sumen, resten y multipliquen polinomios.



**B. Aprendan la relación existente el valor cero y los factores de los polinomios.**

- Determinen los ceros de las funciones cuadráticas y utilícenlos, para trazar un gráfico de la función definida por el polinomio.

**Planteamiento de ecuaciones\***

**A1: A-CED**

**A. desarrollen ecuaciones que caractericen números o relaciones.**

- Elaboren ecuaciones y desigualdades con una sola variable y aplíquenlas en la solución de problemas. *Trabajen ecuaciones que resulten de funciones lineales, cuadráticas y exponenciales.*
- Elaboren ecuaciones con dos o más variables que representen las relaciones entre diferentes cantidades, y grafiquen las ecuaciones sobre ejes coordenados con nombres y escalas.
- Representen las condiciones especiales por medio de ecuaciones o desigualdades y además, por medio de sistemas de ecuaciones y desigualdades; determinen además la viabilidad de las soluciones en el marco del contenido del modelo. *Por ejemplo, escriban desigualdades que establezcan las condiciones especiales que aplican sobre factores de nutrición y costo, para una combinación de diferentes alimentos.*
- Reorganicen las fórmulas de tal manera que se haga énfasis en la cantidad buscada, utilizando el mismo razonamiento aplicado en las solución de ecuaciones. *Por ejemplo, reorganicen la ley de Ohm,  $V= IR$ , de manera que se enfatice el valor de la resistencia  $R$ .*

**Análisis de ecuaciones y desigualdades**

**A1: A-REI**

**A. Aprendan a solucionar ecuaciones entendidas como un proceso de deducción y expliquen el razonamiento seguido.**

- Expliquen cada paso seguido en la solución de una ecuación simple resultante de la igualdad de los números encontrados en un paso anterior, asumiendo que la ecuación original tiene solución. Elaboren un argumento válido para justificar un método de solución.

**B. Resuelvan ecuaciones y desigualdades que incluyan una sola variable.**

- Resuelvan ecuaciones y desigualdades que incluyan una sola variable, incluyendo ecuaciones con coeficientes representados por letras.
- Resuelvan ecuaciones cuadráticas con una sola variable.
  - Apliquen el método de desarrollo del cuadrado, para transformar cualquier ecuación cuadrática en  $x$  en una ecuación de la forma  $(x - p)^2 = q$  que tiene la misma solución. Deduzcan la fórmula cuadrática a partir de esta ecuación.
  - Resuelvan ecuaciones cuadráticas aplicando el método de inspección (p. ej. , haciendo  $x^2 = 49$ ), cálculo de raíces cuadradas, desarrollo de cuadrados, aplicando la fórmula para ecuaciones cuadráticas y luego factorizando, según lo requiera la fórmula original de la ecuación. Señalen el momento en que una fórmula cuadrática dé como resultado soluciones complejas, e identifíquenla como "sin solución real".

**C. Resuelvan sistemas de ecuaciones.**

- Comprueben que dado un sistema de dos ecuaciones con dos variables, el reemplazo de una de ellas por la adición de esa ecuación a uno de los múltiplos de la otra, da como resultado un sistema que tiene las mismas soluciones.
- Resuelvan sistemas de ecuaciones lineales de forma exacta y aproximada (p. ej. , recurriendo a gráficos), haciendo énfasis en pares de ecuaciones lineales con dos variables.

**D. Representen y resuelvan ecuaciones y desigualdades por medio de gráficas.**

- Noten que la gráfica de una ecuación con dos variables es igual al conjunto de todas sus soluciones, representadas en una gráfica trazada sobre un plano de coordenadas y que generalmente da como resultado una curva (que podría ser una línea).

11. Expliquen la razón por la que las coordenadas en el eje de las  $x$ , de los puntos en que las gráficas de las ecuaciones  $y = f(x)$  y  $y = g(x)$  se intersectan, representan las soluciones de la ecuación  $f(x) = g(x)$ . Apliquen métodos de solución aproximados, utilizando por ejemplo gráficas con estas funciones, elaborando tablas de valores o buscando aproximaciones sucesivas. Incluyan casos en los que  $f(x)$  y/o  $g(x)$  sean una función lineal, polinomial, racional, de tramos lineales (que consideren un valor absoluto) y funciones exponenciales. ★
12. Grafiquen las soluciones desarrollándolas en una desigualdad lineal con dos variables que den un semiplano (excluyendo la condición limitadora en caso de una desigualdad estricta), y grafiquen la solución encontrada para un sistema de desigualdades lineales con dos variables, como la intersección de los semiplanos correspondientes.

## Funciones

### Interpretación de funciones

### A1: F-IF

#### A. Aprendan el concepto de función y practiquen la notación típica de las funciones.

1. Observen que a cada función de un conjunto (llamado dominio) le corresponde exactamente un elemento del otro conjunto (llamado rango). Si  $f$  representa una función y  $x$  uno de los elementos de su dominio, entonces  $f(x)$  indica el valor dependiente ("salida") de la función  $f$ , que corresponde al valor independiente ("entrada")  $x$ . La gráfica de  $f$  es igual a la gráfica que responde a la ecuación  $y = f(x)$ .
2. Utilizando la notación propia de las funciones calculen las correspondientes a valores independientes ("entradas") contenidos en sus dominios, e interpreten los enunciados que utilizan la notación de las funciones en términos de su contenido.
3. Observen que las secuencias encontradas son funciones cuyo dominio es un subconjunto de los números enteros. Relacionen secuencias aritméticas con funciones lineales y, secuencias geométricas con funciones exponenciales.

#### B. Expliquen las funciones que resultan en aplicaciones en términos de su contenido.

4. Expliquen las características fundamentales mostradas en gráficas y tablas en términos de cantidades para las funciones lineales, de tramos lineales (que consideren valores absolutos), cuadráticas y exponenciales que configuren una relación entre dos cantidades, y tracen gráficos que muestren las características esenciales de la relación tal como aparecen descritas en un enunciado verbal. Las características fundamentales incluyen: puntos de intersección, intervalos en los que la función sea creciente, decreciente, positiva o negativa; máximos y mínimos relativos; y simetrías y comportamiento en los extremos. ★
5. Relacione con su gráfica el dominio de una función y en cuanto sea necesario, con la relación cuantitativa que plantea. Por ejemplo, si la función  $h(n)$  nos da el número de personas-hora necesario para ensamblar "n" motores en una fábrica, entonces los números enteros positivos serían un dominio adecuado para la función. ★
6. Calculen y expliquen el índice de variación promedio de una función lineal, cuadrática, de tramos lineales (que consideren valores absolutos) y exponencial, (dado de manera simbólica o en forma de tabla) en un determinado intervalo. A partir de una gráfica estimen el índice de variación. ★

#### C. Analicen funciones recurriendo a diferentes representaciones.

7. Grafiquen funciones expresadas de manera simbólica y muestren las características más sobresalientes de la gráfica, manualmente para los casos sencillos y con recursos tecnológicos en los casos más complejos. ★
  - a. Grafiquen funciones lineales y cuadráticas mostrando los puntos de intersección, máximos y mínimos.
  - b. Grafiquen funciones de tramos lineales (que consideren un valor absoluto) y exponenciales.
8. Escriban una función que esté definida por una expresión dada en formas diferentes pero equivalentes, para demostrar y explicar las diferentes propiedades de la función.
  - a. Apliquen el método de factorización para desarrollar el cuadrado de una función cuadrática y analizar los valores 0, los valores extremos y la simetría de la gráfica, y poder interpretarlos en términos de su contenido.

9. Comparen las propiedades de dos funciones (lineales, cuadráticas, de tramos lineales (que consideren valores absolutos o exponenciales) que se representen cada una de manera diferente (algebraicamente, gráficamente, numéricamente en forma de tablas o por enunciados orales). *Por ejemplo, dada una gráfica para una función cuadrática y otra para una expresión algebraica, determinen cuál de ellas tiene el valor máximo más alto.*

## Desarrollo de funciones

A1: F-BF

### A. Desarrollen una función que describa la relación lineal entre dos cantidades.

1. Escriban una función lineal, cuadrática o exponencial que describa una relación entre dos cantidades. ★  
a. Definan una expresión formal, un proceso recursivo o los pasos para hacer un cálculo a partir de un contenido.

### B. Desarrollen nuevas funciones a partir de funciones existentes.

3. Señalen el efecto en la gráfica del cambio de  $f(x)$  por  $f(x)+k$ ,  $kf(x)$ ,  $f(kx)$ , y  $f(x+k)$  para valores específicos de  $k$  (positivos y negativos). Sin ayuda de medios tecnológicos, hallen el valor de  $k$  conociendo las gráficas de funciones lineales y cuadráticas. Con ayuda de medios tecnológicos, analicen diferentes situaciones y expliquen los efectos causados en gráficas que incluyen situaciones en las que  $f(x)$  corresponde a una función lineal, cuadrática, de tramos lineales (que considere valores absolutos) o exponencial.

## Modelos lineales, cuadráticos y exponenciales★

A1: F-LE

### A. Desarrollen y comparen modelos lineales, cuadráticos y exponenciales, para resolver problemas.

1. Hagan una diferencia entre situaciones que pueden ser descritas por medio de funciones lineales y exponenciales.  
a. Comprueben que las funciones lineales aumentan en cantidades diferentes para intervalos iguales y, que las funciones exponenciales aumentan en factores iguales para intervalos iguales.  
b. Identifiquen situaciones en las que un valor cambia a una tasa constante, por cada unidad de intervalo en relación con otro.  
c. Identifiquen situaciones en las que un valor aumenta o disminuye a una tasa porcentual constante, por cada unidad de intervalo en relación con otro.
2. A partir de una gráfica, de la descripción de una relación o, de dos pares de valores de entrada y de salida, construyan funciones lineales y exponenciales incluyendo secuencias aritméticas y geométricas.
3. A partir de información dada por gráficas y tablas, observen que una magnitud con aumentos exponenciales ocasionalmente excede una cantidad que se incrementa, como lo hace una función lineal, cuadrática o más comúnmente, polinomial.

### B. Interpreten expresiones para funciones en términos de la situación que describen.

5. Describan los parámetros de una función lineal, cuadrática o exponencial, en términos de un contenido específico.

## Estadística y cálculo de probabilidad★

### Interpretación de datos categóricos y cuantitativos

A1: S-ID

#### A. Resuman, representen e interpreten, datos obtenidos en un solo conteo o resultados de medición

2. Apliquen las herramientas estadísticas convenientes para la figura que representan los datos de distribución, a fin de comparar medidas de tendencia central (media y mediana) y de dispersión (rango intercuartil y desviación estándar), de dos o más conjuntos diferentes de datos.

3. Según el contenido de los conjuntos de datos interpreten las diferencias en forma, medidas de tendencia central y dispersión, responsables de posibles efectos provocados por puntos que responden a valores extremos (valores atípicos ó *outliers*).

**B. Resuman, representen e interpreten, datos de dos variables categóricas o cuantitativas.**

5. Resuman datos categóricos para dos categorías relacionadas en tablas de frecuencia de doble entrada. Interpreten las frecuencias relativas de acuerdo al contenido de los datos (que incluyan frecuencias combinadas, marginales y relativas condicionales). Determinen en los datos posibles asociaciones y tendencias.
6. Utilizando dos variables cuantitativas representen los datos en un diagrama de dispersión, y describan la forma como ellas se relacionan.
  - a. Desarrollen una función con los datos obtenidos. Apliquen las funciones obtenidas con los datos para solucionar problemas relacionados con su contenido. *Utilicen las funciones obtenidas o busquen una a partir del contexto de los datos. Hagan énfasis en modelos lineales y cuadráticos.*
  - b. Evalúen de manera sencilla el grado de ajuste de una función, mediante el gráfico y el análisis de valores residuales.
  - c. Ajusten una función lineal a un diagrama de dispersión que sugiera una asociación lineal.

**C. Expliquen los modelos lineales.**

7. De acuerdo con el contenido de los datos, expliquen el valor de la pendiente (índice de variación) y el punto de intersección (término constante) de un modelo lineal.
8. Calculen (recurriendo a recursos tecnológicos) e interpreten el coeficiente de correlación de una regresión lineal.
9. Determinen la diferencia entre correlación y causalidad.

★Estándares para elaboración de modelos - La elaboración de modelos matemáticos corresponde a un Estándar para la Práctica de las Matemáticas, y los estándares para la elaboración de modelos específicos, aparecen en todas las manifestaciones de estándares para la educación secundaria. El ciclo básico para la elaboración de modelos comprende

1. la identificación de variables dentro de un contexto dado, y la selección de aquellos que describen características esenciales,
2. para la formulación de un modelo mediante la creación y selección de representaciones geométricas, gráficas, tabulares, algebraicas o estadísticas, que describan las relaciones entre las variables,
3. que analizan y desarrollan operaciones con estas relaciones, para sacar conclusiones
4. que interpreten los resultados de los cálculos en términos de la situación original
5. que valida las conclusiones mediante su comparación con la situación, y luego, ya sea mejorando el modelo o, si es posible,
6. haciendo un reporte a partir de las conclusiones y el razonamiento implícito

Las opciones, supuestos y aproximaciones están presentes a través de todo este ciclo.

## Geometría

### Congruencia

### GM: G-CO

#### A. Trabajen con transformaciones en el plano cartesiano.

1. Aprendan las definiciones exactas de ángulo, círculo, línea perpendicular, línea paralela y segmento a partir de las nociones imprecisas de punto, línea, distancia a lo largo de una línea y distancia alrededor de un arco de círculo.
2. Describan las transformaciones en el plano utilizando por ejemplo, transparencias, papel de calcar o algún software de geometría, y describan las transformaciones como funciones que asumen valores como entradas en el plano cartesiano y dan otros valores como salidas. Comparen transformaciones que conservan los valores de distancias y ángulos, con aquellas que no lo hacen (p. ej. , traslación frente a estiramiento horizontal).
3. A partir de un rectángulo, paralelogramo, trapecioide o polígono regular conocido, describan las rotaciones y la simetría axial que pueden realizar sobre sí mismos.
4. Desarrollen definiciones de rotaciones, simetría axial y traslaciones, en términos de ángulos, círculos, líneas perpendiculares, líneas paralelas y segmentos de línea.
5. Dada una figura geométrica y sus posibles movimientos de rotación, de simetría axial o de traslación, dibujen la figura transformada utilizando por ejemplo, papel gráfico, papel de calcar o algún software geométrico. Especifiquen una secuencia de transformaciones en otras figuras, que pueda presentar una figura dada.

#### B. Aprendan la congruencia en términos de movimientos rígidos.

6. Apliquen las descripciones de movimientos rígidos para la transformación de figuras, y para poder predecir el efecto que tenga un movimiento rígido dado sobre una figura conocida. Dadas dos figuras determinadas, apliquen la definición de congruencia en términos de movimientos rígidos, para decidir si son congruentes.
7. Utilicen la definición de congruencia en términos de movimientos rígidos para demostrar que dos triángulos son congruentes, si y solo si, los pares de lados correspondientes y los pares de ángulos correspondientes son congruentes.
8. Expliquen de qué manera el criterio para la congruencia del triángulo (ASA, SAS y SSS), se desprenden de la definición de congruencia bajo el concepto de movimientos rígidos.

#### C. Comprueben y practiquen teoremas geométricos.

9. Comprueben y practiquen los teoremas sobre líneas y ángulos. Los teoremas son los siguientes: los ángulos verticales son congruentes. Cuando una línea transversal corta líneas paralelas, tanto los ángulos interiores alternos como los ángulos correspondientes son congruentes. Los puntos sobre una bisectriz perpendicular a un segmento de línea, son aquellos equidistantes perfectos de los extremos del segmento.
10. Comprueben y practiquen los teoremas sobre triángulos. Los teoremas son los siguientes: la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a  $180^\circ$ . Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes. El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud. Las medianas de un triángulo se encuentran en algún punto.
11. Comprueben y practiquen los teoremas sobre paralelogramos. Los teoremas son los siguientes: lados opuestos son congruentes, ángulos opuestos son congruentes; las diagonales de un paralelogramo se cortan entre sí y de manera recíproca, los rectángulos son paralelogramos *con diagonales congruentes*.

#### D. Elaboren construcciones geométricas.

12. Hagan construcciones geométricas tradicionales utilizando por ejemplo, compás y regla, una cuerda, dispositivos reflectantes, plegados de papel o un software para geometría dinámica. Ejemplos: Copiar un segmento; copiar un ángulo; dividir un segmento en partes iguales; dividir un ángulo en partes iguales; trazar líneas perpendiculares incluyendo la bisectriz perpendicular de un segmento de línea; y, el trazado de una línea paralela a otra línea dada, a través de un punto que se encuentra por fuera de ella.

13. Tracen un triángulo equilátero, un cuadrado y un hexágono regular, circunscritos en un círculo.

## Semejanza, triángulos rectángulos y trigonometría

GM: G-SRT

### A. Comprendan el concepto de semejanza desde el punto de vista transformaciones similares.

1. Comprueben de manera experimental las propiedades de las dilataciones provocadas por un centro y un factor de escala:
  - a. Una dilatación transforma en línea paralela una línea que no pasa por el centro de la dilatación, y deja sin cambio una línea que pase por el centro.
  - b. La dilatación de un segmento de línea es más larga o más corta en la razón dada por un factor de escala.
2. Dadas dos figuras conocidas apliquen la definición de semejanza en términos de transformaciones similares para determinar si son semejantes; recurriendo al concepto de transformaciones similares, expliquen el significado de la semejanza de triángulos como la igualdad de todos los pares de ángulos correspondientes y la proporcionalidad de todos los pares de lados correspondientes.
3. Apliquen las propiedades de las transformaciones similares, para demostrar el criterio AA en la semejanza de dos triángulos.

### B. Comprueben y practiquen los teoremas sobre semejanza.

4. Comprueben y practiquen los teoremas sobre triángulos. *Los teoremas son: una línea paralela a un lado de un triángulo divide a otros dos en partes proporcionales, y de manera recíproca; el teorema de pitágoras comprueba el uso de la semejanza del triángulo; criterio SAS de semejanza; criterio SSS de semejanza; semejanza ASA.*
5. Apliquen los criterios de congruencia y semejanza de los triángulos, para resolver problemas y comprobar relaciones en figuras geométricas.

### C. Definan razones trigonométricas y resuelvan problemas relacionados con triángulos rectángulos.

6. Aprendan que en razón de la semejanza, las razones de los lados en los triángulos rectángulos, incluyendo los triángulos rectángulos especiales (con ángulos de 30-60-90 y 45-45-90 grados), son propiedades de los ángulos del triángulo que permiten las definiciones de razones trigonométricas para ángulos agudos.
7. Expliquen y apliquen las relación entre el seno y el coseno de ángulos complementarios.
8. Apliquen las razones trigonométricas y el Teorema de Pitágoras para resolver triángulos rectángulos en problemas aplicados. \*

## Círculos

GM: G-C

### A. Aprendan y practiquen los teoremas sobre círculos.

1. Demuestren que todos los círculos son semejantes.
2. Determinen y expliquen las relaciones entre ángulos, radios y cuerdas, incluyendo lo siguiente: *La relación que existe entre los ángulos central, inscrito y circunscrito; los ángulos inscritos en un diámetro son ángulos rectos y, el radio de un círculo es perpendicular a la tangente del punto en que el radio interseca el círculo.*
3. Tracen los círculos inscritos y circunscritos de un triángulo, y comprueben las propiedades de los ángulos de un cuadrilátero inscrito en un círculo.

### B. Hallen las longitudes de arcos y las áreas de sectores de círculos.

5. Apliquen el concepto de semejanza para determinar que la longitud del arco que interseca un ángulo es proporcional al radio, y definan la medida del radio de un ángulo como la constante de proporcionalidad. Deriven la fórmula para el área de un sector.



## Manifestación de las propiedades geométricas mediante ecuaciones

GM: G-GPE

### A. Transición de la descripción geométrica a la ecuación de una sección cónica.

1. A partir del Teorema de Pitágoras deduzcan la ecuación de un círculo con determinado centro y radio. Desarrollen el cuadrado por medio de una ecuación para hallar el centro y el radio de un círculo dado.

### B. Utilicen coordenadas para comprobar de manera algebraica los teoremas geométricos.

4. Utilicen coordenadas para comprobar de manera algebraica los teoremas geométricos. *Por ejemplo, comprueben o rechacen la afirmación de que una figura definida por cuatro puntos en el plano cartesiano, corresponde a un rectángulo. Comprueben o rechacen la afirmación que el punto  $(1, \sqrt{3})$  se encuentra en el círculo cuyo centro es el origen y que contiene el punto  $(0, 2)$ .*
5. Comprueben el criterio de la pendiente para líneas paralelas y perpendiculares y aplíquelo para resolver problemas geométricos (p. ej. , hallen la ecuación de una línea paralela o perpendicular a otra conocida, que pasa por un punto dado).
6. En un segmento de línea dirigido hallen el punto entre dos puntos conocidos, que divide el segmento en un radio dado.
7. Utilicen las coordenadas para calcular perímetros de polígonos y áreas de triángulos y rectángulos; aplicando por ejemplo la fórmula para calcular distancias\*

## Medida y dimensión geométrica

GM: G-GMD

### A. Expliquen las fórmulas para hallar volumen y aplíquenla en la solución de problemas.

1. Enuncien un argumento informal (no lógico) del tipo, argumentos de disección, el principio de Cavalieri o argumentos límite informales para las fórmulas de la circunferencia de un círculo; área de un círculo, volumen de un cilindro, de una pirámide y de un cono.
3. Apliquen las fórmulas para cilindros, pirámides, conos y esferas en la solución de problemas. \*

### B. Representen las relaciones entre objetos de dos y tres dimensiones.

4. Determinen las formas características de dos secciones transversales bidimensionales de objetos tridimensionales y además, determinen también objetos tridimensionales generados por las rotaciones de objetos bidimensionales.

## Elaboración de modelos por medios geométricos

GM: G-MG

### A. Apliquen los conceptos de la geometría en situaciones de elaboración de modelos.

1. Utilicen figuras geométricas, sus medidas y sus propiedades para describir objetos (p. ej. , representar el tronco de árbol o el torso humano en forma de cilindro). \*
2. Apliquen conceptos de densidad a partir de áreas y volúmenes para la representación de determinadas situaciones (p. ej. , individuos por milla cuadrada, cantidad de BTU por pie cúbico). \*
3. Apliquen métodos geométricos para la solución de problemas de diseño (p. ej. , diseño de un objeto o estructura que cumpla con determinados límites físicos o minimice costes; trabajo con sistemas de cuadrículas tipográficas a partir de razones). \*

## Estadística y cálculo de probabilidad\*

### Probabilidad condicionada y las leyes de probabilidad

GM: S-CP

#### A. Comprendan los conceptos de independencia y probabilidad condicionada, y aplíquenlos en la interpretación de datos.

1. Describan los eventos como subconjuntos de un espacio muestral (el conjunto de resultados), utilizando las características (o categorías) de los resultados, o como combinaciones, intersecciones o complementos de otros eventos ("ó", "y", "no").
2. Observen que dos eventos  $A$  y  $B$  son independientes, si la probabilidad de que  $A$  y  $B$  ocurran simultáneamente es igual al producto de sus propias probabilidades, y utilicen esta característica para determinar si ellos son independientes.
3. Consideren la probabilidad condicionada de  $A$  dada  $B$  como  $P(A \text{ y } B)/P(B)$ , e interpreten la independencia de  $A$  y de  $B$  asumiendo que la probabilidad condicionada de  $A$  dada  $B$  es la misma probabilidad de  $A$ , y que la probabilidad condicionada de  $B$  dada  $A$  es la misma que la de  $B$ .
4. Elaboren e interpreten tablas de datos de doble entrada, para dos categorías que se asocian con cada objeto clasificado. Utilicen la tabla con doble entrada como un espacio muestral, para decidir si los eventos son independientes y para aproximar probabilidades condicionada. *Por ejemplo, a partir de una muestra aleatoria de estudiantes en su colegio recopilen datos sobre su tema preferido, a escoger entre las matemáticas, las ciencias y el inglés. Estimen la probabilidad de que un estudiante escogido de manera aleatoria en su colegio, preferiría las ciencias teniendo en cuenta que el estudiante está cursando 10º grado. Repitan el ejercicio con otros individuos y comparen los resultados.*
5. Determinen y expliquen los conceptos de probabilidad condicionada e independencia, en cada idioma y para situaciones cotidianas. *Por ejemplo, comparen la posibilidad de tener cáncer de pulmón si se es fumador/a frente a la posibilidad de ser un fumador si se padece de cáncer.*

#### B. Apliquen las leyes de probabilidad para el cálculo de probabilidades de eventos compuestos, dentro del entorno de un modelo de probabilidad uniforme.

6. Hallen la probabilidad condicionada de  $A$  dada  $B$ , como la fracción de los resultados de  $B$  que también corresponden a  $A$ , e interpreten la respuesta en términos de un modelo.
7. Apliquen la regla de la adición,  $P(A \text{ ó } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$ , y representen la respuesta según los términos del modelo.

\*Estándares para elaboración de modelos - La elaboración de modelos matemáticos corresponde a un Estándar para la Práctica de las Matemáticas, y

los estándares para la elaboración de modelos específicos, aparecen en todas las manifestaciones de estándares para la educación secundaria. El ciclo básico para la elaboración de modelos comprende

1. la identificación de variables dentro de un contexto dado, y la selección de aquellos que describen características esenciales,
2. para la formulación de un modelo mediante la creación y selección de representaciones geométricas, gráficas, tabulares, algebraicas o estadísticas, que describan las relaciones entre las variables,
3. que analizan y desarrollan operaciones con estas relaciones, para sacar conclusiones
4. que interpreten los resultados de los cálculos en términos de la situación original
5. que valida las conclusiones mediante su comparación con la situación, y luego, ya sea mejorando el modelo o, si es posible,
6. haciendo un reporte a partir de las conclusiones y el razonamiento implícito.

Las opciones, supuestos y aproximaciones están presentes a través de todo este ciclo.

## Número y cantidad

### El Sistema de los Números Reales

A2: N-RN

#### A. Amplíen las propiedades de los exponentes a los exponentes racionales.

- Expliquen la forma como la interpretación del significado de los exponentes racionales, es consecuencia de la proyección de las propiedades de los exponentes enteros a dichos valores, dando como resultado una notación para los radicales en términos de exponentes racionales. *Por ejemplo, nosotros definimos  $5^{1/3}$  como la raíz cúbica de 5 porque queremos que la ecuación  $(5^{1/3})^3 = 5^{(1/3)3}$  sea válida y por lo tanto,  $(5^{1/3})^3$  debe ser igual a 5.*
- Replanteen las expresiones que involucren radicales y exponentes racionales, aplicando las propiedades de los exponentes.

### Cantidades\*

A2: N-Q

#### A. Deduzcan de manera cuantitativa y utilicen unidades para resolver problemas.

- Definan cantidades adecuadas con el fin de elaborar modelos descriptivos.

### El sistema numérico complejo

A2: N-CN

#### A. Practiquen operaciones aritméticas con números complejos.

- Sepan que hay un número complejo  $i$  que satisface la condición  $i^2 = -1$ , y que cada número complejo cumple con la forma  $a + bi$ , siendo  $a$  y  $b$  números reales.
- Apliquen la relación  $i^2 = -1$  además de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva, para sumar, restar y multiplicar números complejos.

#### C. Practiquen los números complejos en identidades y ecuaciones con polinomios.

- Resuelvan ecuaciones cuadráticas que tengan soluciones complejas y cuyos coeficientes sean números reales.

## Álgebra

### Análisis de estructuras en las expresiones matemáticas

A2: A-SSE

#### A. Interpreten la estructura de las expresiones matemáticas.

- Utilicen la estructura de una expresión para identificar diferentes formas de replanteamiento. *Por ejemplo, desarrollen  $x^4 - y^4$  en la expresión  $(x^2)^2 - (y^2)^2$ , quedando de esta manera planteada como una diferencia de cuadrados susceptible de factorizar en la expresión  $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$ .*

#### B. Escriban expresiones de formas equivalentes para la solución de problemas matemáticos.

- Seleccionen y obtengan una forma equivalente de una expresión dada, para mostrar y describir las propiedades de la cantidad que implica la expresión. ★
  - Apliquen las propiedades de los exponentes para transformar expresiones en funciones exponenciales. *Por ejemplo, la expresión  $1 \cdot 15^t$  puede ser replanteada como  $(1 \cdot 15^{1/12})^{12t} \approx 1 \cdot 012^{12t}$  y dejar ver que la tasa aproximada de interés mensual equivalente es 15%.*
- Para la solución de problemas apliquen la fórmula de la suma de una serie geométrica finita (cuando la razón común es diferente de 1). *Por ejemplo, calculen pagos de hipoteca.* ★

### Operaciones aritméticas con polinomios y expresiones racionales

A2: A-APR

#### B. Aprendan la relación existente el valor cero y los factores de los polinomios.

- Aprendan y practiquen el Teorema de los Residuos: Dado el polinomio  $p(x)$  y un número  $a$ , el valor residual de su división por  $x - a$  es igual a  $p(a)$ , de tal manera que  $p(a) = 0$  si y solo si,  $(x - a)$  es un factor de  $p(x)$ .
- Cuando se tenga el sistema de factorización adecuado determinen los valores cero de un polinomio, y utilícenlos para trazar un gráfico general de la función definida por el polinomio.

**C. Apliquen la identidades polinomiales en la solución de problemas.**

- Apliquen las identidades polinomiales para describir las relaciones numéricas. *Por ejemplo, la identidad polinomial  $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$  puede aplicarse para deducir la terna pitagórica.*

**D. Replanteen las expresiones racionales.**

- Replanteen expresiones racional simples en diferentes formas; escriban  $a(x)/b(x)$  de la forma  $q(x) + r(x)/b(x)$ , donde  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $q(x)$ , y  $r(x)$  son polinomios con el grado de  $r(x)$  menor que el grado de  $b(x)$ , aplicando métodos de inspección, de división larga o, para los casos más complejos, un sistema algebraico de computación.

**Planteamiento de ecuaciones★**

**A2: A-CED**

**A. Desarrollen ecuaciones que caractericen números o relaciones.**

- Elaboren ecuaciones y desigualdades con una sola variable y aplíquenlas en la solución de problemas. *Incluyan ecuaciones resultantes de funciones lineales y cuadráticas, y de funciones simples racionales o exponenciales.*

**Análisis de ecuaciones y desigualdades**

**A2: A-REI**

**A. Aprendan a solucionar ecuaciones entendidas como un proceso de deducción y expliquen el razonamiento seguido.**

- Expliquen cada paso seguido en la solución de una ecuación resultante de la igualdad de los números encontrados en un paso anterior, asumiendo que la ecuación original tiene solución. Elaboren un argumento válido para justificar un método de solución.
- Resuelvan ecuaciones simples racionales y radicales con una variable y, den ejemplos que muestren la forma como se pueden presentar algunas soluciones extrañas.

**B. Resuelvan ecuaciones y desigualdades que incluyan una sola variable.**

- Resuelvan ecuaciones cuadráticas con una sola variable.
  - Resuelvan ecuaciones cuadráticas aplicando el método de inspección (p. ej. , haciendo  $x^2 = 49$ ), cálculo de raíces cuadradas, desarrollo de cuadrados, aplicando la fórmula para ecuaciones cuadráticas y luego factorizando, según lo requiera la fórmula original de la ecuación. Señalen el momento en que una fórmula cuadrática dé como resultado soluciones complejas, e identifiquenla como  $a \pm bi$  para los números reales  $a$  y  $b$ .

**C. Resuelvan sistemas de ecuaciones.**

- Resuelvan sistemas de ecuaciones lineales de manera exacta y aproximada (p. ej. , por medio de gráficas), limitados a procedimientos con tres ecuaciones y tres variables como máximo. En casos de soluciones gráficas los sistemas no deben exceder dos variables.
- Resuelvan de manera algebraica y gráfica un sistema simple, que comprenda una ecuación lineal y una cuadrática con dos variables *Por ejemplo, hallen los puntos de intersección entre la línea  $y = -3x$ , y el círculo  $x^2 + y^2 = 3$ .*

**D. Representen y resuelvan ecuaciones y desigualdades por medio de gráficas.**

- Expliquen la razón por la que las coordenadas en el eje de las  $x$ , de los puntos en que las gráficas de las ecuaciones  $y = f(x)$  y  $y = g(x)$  se intersecan, representan las soluciones de la ecuación  $f(x) = g(x)$ . Apliquen métodos de solución aproximados, utilizando por ejemplo gráficas con estas funciones, elaborando tablas de valores o buscando aproximaciones sucesivas. Incluyan casos en los que  $f(x)$  y/o  $g(x)$  sean funciones lineales, polinomiales, racionales, de valor absoluto, exponenciales y logarítmicas. ★

## Funciones

### Interpretación de funciones

A2: F-IF

#### B. Expliquen las funciones que resultan en aplicaciones en términos de su contenido.

4. Para una función lineal que configure una relación entre dos cantidades, expliquen las características fundamentales mostradas en gráficas y tablas en términos de cantidades, y tracen gráficos que muestren las características esenciales de la relación tal como aparecen descritas en un enunciado verbal. *Las características fundamentales incluyen: puntos de intersección, intervalos en los que la función sea creciente, decreciente, positiva o negativa; máximos y mínimos relativos; simetrías; comportamiento en los extremos y periodicidad.* ★
6. Calculen y expliquen el índice de variación promedio de una función (representada de manera simbólica o en forma de tabla) en un determinado intervalo. A partir de una gráfica estimen el índice de variación. ★

#### C. Analicen funciones recurriendo a diferentes representaciones.

7. Grafiquen funciones expresadas de manera simbólica y muestren las características más sobresalientes de la gráfica, manualmente para los casos sencillos y con recursos tecnológicos en los casos más complejos. ★
  - b. Hagan gráficas de las funciones raíz cuadrada, raíz cúbica y definida por tramos, incluyendo funciones escalonadas y de valor absoluto.
  - c. Grafiquen funciones polinomiales, determinando los valores cero cuando se haya realizado la factorización conveniente y se vea el comportamiento en los extremos.
  - e. Grafiquen las funciones exponenciales y logarítmicas, mostrando puntos de intersección y comportamientos extremos, las funciones trigonométricas, el período, la línea media y la amplitud.
8. Escriban una función que esté definida por una expresión dada en formas diferentes pero equivalentes, para demostrar y explicar las diferentes propiedades de la función.
  - b. Apliquen las propiedades de los exponentes para representar expresiones en funciones exponenciales. *Por ejemplo, representen el índice de variación porcentual en funciones del tipo,  $y = (1.02)^t$ ,  $y = (0.97)^t$ ,  $y = (1.01)^{12t}$ ,  $y = (1.2)^{t/10}$ , y ordénelos de acuerdo a su incremento o decremento exponencial.*
9. Comparen las propiedades de dos funciones que se representan cada una de manera diferente (algebraicamente, gráficamente, numéricamente en forma de tablas o por enunciados orales). *Por ejemplo, dada una gráfica para una función cuadrática y otra para una expresión algebraica, determinen cuál de ellas tiene el valor máximo más alto.*

### Desarrollo de funciones

A2: F-BF

#### A. Desarrollen una función que describa la relación lineal entre dos cantidades.

1. Escriban una función que describa la relación lineal entre dos cantidades. ★
  - a. Definan una expresión formal, un proceso recursivo o los pasos para hacer un cálculo a partir de un contenido.
  - b. Combinen los tipos de función estándar utilizando operaciones matemáticas. *Por ejemplo, deduzcan una función que represente la temperatura de un cuerpo de refrigeración, adicionando una función constante a una exponencial decadente y relacionen estas funciones con el modelo.*
2. Escriban secuencias aritméticas y geométricas tanto de manera recursiva como con una fórmula explícita, y aplíquenlas para elaborar modelos de situaciones diversas y hacer traslados entre las dos formas. ★

#### B. Construyan nuevas funciones a partir de funciones existentes.

3. Señalen el efecto en la gráfica del cambio de  $f(x)$  por  $f(x) + k$ ,  $k f(x)$ ,  $f(kx)$ , y  $f(x + k)$  para valores específicos de  $k$  (tanto positivos como negativos). Hallen el valor de  $k$  a partir de las gráficas. Trabajen con casos e ilustren una explicación de los efectos sobre la gráfica, recurriendo al uso de la tecnología. *Incluyan la determinación de funciones pares e impares a partir de sus gráficas y expresiones algebraicas.*
4. Hallen las funciones inversas.

- a. Resuelvan una ecuación de la forma,  $f(x) = c$  para una función simple  $f$  que tiene un inverso y, enuncien una expresión para el inverso. *Por ejemplo,  $f(x) = 2x^3$  ó  $f(x) = (x+1)/(x-1)$  para  $x \neq 1$ .*

### Modelos lineales, cuadráticos y exponenciales\*

A2: F-LE

#### A. Desarrollen y comparen modelos lineales, cuadráticos y exponenciales, para desarrollar problemas.

2. A partir de una gráfica, de la descripción de una relación o, de dos pares de valores de entrada y de salida (incluyendo la lectura de estos a partir de una tabla), construyan funciones lineales y exponenciales incluyendo secuencias aritméticas y geométricas para resolver problemas que sigan muchos pasos.
4. Para modelos exponenciales expresen en forma de logaritmo la solución a la ecuación  $ab^{ct} = d$  en donde  $a$ ,  $c$ , y  $d$  son números y la base  $b$  toma los valores 2, 10, ó  $e$ ; evalúen el logaritmo aplicando recursos de tecnología.

#### B. Interpreten expresiones para funciones en términos de la situación que describen.

5. Describan los parámetros de una función lineal, cuadrática o exponencial, en términos de un contenido específico.

### Funciones trigonométricas

A2: F-TF

#### A. Extiendan el dominio de funciones trigonométricas utilizando un círculo unitario.

1. Consideren la unidad radián de un ángulo, como la longitud de un arco ubicado sobre el círculo unitario delimitado por el ángulo.
2. Expliquen la forma como el círculo unitario en el plano de coordenadas permite la extensión de las funciones trigonométricas a todos los números reales, representados en unidades radián para ángulos que recorren el círculo unitario en sentido antihorario.

#### B. Elaboren modelos de fenómenos periódicos con funciones trigonométricas.

5. Escojan funciones trigonométricas para elaborar modelos de fenómenos periódicos que tengan medidas especiales de amplitud, frecuencia y línea media. \*

#### C. Comprueben y practiquen las identidades trigonométricas

8. Comprueben que la identidad pitagórica,  $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ , y aplíquenla para hallar  $\sin(\theta)$ ,  $\cos(\theta)$ , ó  $\tan(\theta)$  conociendo el  $\sin(\theta)$ ,  $\cos(\theta)$ , ó  $\tan(\theta)$  y el cuadrante respectivo.

## Estadística y cálculo de probabilidad\*

### Interpretación de datos categóricos y cuantitativos

A2: S-ID

#### A. Resuman, representen e interpreten, datos obtenidos en un solo conteo o resultados de medición

4. Utilicen la información sobre media y desviación estándar de un conjunto de datos, para ajustarla a una distribución normal y estimar los porcentajes de la población. Observen que hay conjuntos de datos para los que este procedimiento no es adecuado. Usen calculadoras, hojas de cálculo y tablas para estimar áreas bajo la curva normal.

#### B. Resuman, representen e interpreten, datos de dos variables categóricas o cuantitativas.

6. Utilizando dos variables cuantitativas representen los datos en un diagrama de dispersión, y describan la forma como ellas se relacionan.
  - a. Desarrollen una función con los datos obtenidos. Apliquen las funciones obtenidas con los datos para solucionar problemas relacionados con su contenido. *Utilicen las funciones obtenidas o busquen una a partir del contexto de los datos. Hagan énfasis en modelos exponenciales.*



**Enunciado de inferencias y justificación de conclusiones**

**A2: S-IC**

**A. Comprendan y evalúen los procesos aleatorios que subyacen en los experimentos con soporte estadístico.**

1. Consideren la estadística como un proceso que busca establecer conclusiones acerca de parámetros de una población, tomados de una muestra aleatoria de la población de interés.
2. Determinen si un modelo específico es coherente con los resultados obtenidos de un determinado proceso de generación de datos; aplicando por ejemplo el método de simulación. *Por ejemplo, un modelo determina que la probabilidad de que una moneda lanzada al aire caiga mostrando la cara, es de 0,5. Un resultado que muestre 5 sellos seguidos, ¿los impulsaría a poner en duda el modelo?*

**B. Hagan inferencias y justifiquen las conclusiones obtenidas de encuestas por muestreo, experimentos y estudios basados en la observación.**

3. Comprendan el objetivo y las diferencias que se presentan entre encuestas hechas a grupos de muestra de una población (subconjuntos), experimentos, y estudios basados en la observación. Expliquen la razón por la que el método de aleatorización para selección de muestras se relaciona con los anteriores.
4. Utilicen los datos de una encuesta hecha a subconjuntos de una población para determinar una media o proporción de la población y además, determinen un margen de error aplicando modelos de simulación para selección aleatoria de muestras.
5. Utilicen los datos obtenidos de un experimento realizado con selección aleatoria para comparar dos tratamientos médicos. Apliquen modelos de simulación para decidir si las diferencias entre los parámetros son significativas.
6. Evalúen los informes a partir de la información obtenida.

★Estándares para elaboración de modelos - La elaboración de modelos matemáticos corresponde a un Estándar para la Práctica de las Matemáticas, y

los estándares para la elaboración de modelos específicos, aparecen en todas las manifestaciones de estándares para la educación secundaria. El ciclo básico para la elaboración de modelos comprende

1. la identificación de variables dentro de un contexto dado, y la selección de aquellos que describen características esenciales,
2. para la formulación de un modelo mediante la creación y selección de representaciones geométricas, gráficas, tabulares, algebraicas o estadísticas, que describan las relaciones entre las variables,
3. que analizan y desarrollan operaciones con estas relaciones, para sacar conclusiones
4. que interpreten los resultados de los cálculos en términos de la situación original
5. que valida las conclusiones mediante su comparación con la situación, y luego, ya sea mejorando el modelo o, si es posible,
6. haciendo un reporte a partir de las conclusiones y el razonamiento implícito.

Las opciones, supuestos y aproximaciones están presentes a través de todo este ciclo.

## Glosario

**Adición y sustracción con números en los rangos de 5, 10, 20, 100 ó 1000.** La adición o sustracción de dos números enteros con respuestas dadas en términos de números enteros, y con el sustraendo o el minuendo dentro de los rangos 0-5, 0-10, 0-20 ó 0-100 respectivamente. Ejemplo:  $8 + 2 = 10$  representa una operación de adición con números hasta 10,  $14 - 5 = 9$  es una resta con números hasta 20 y,  $55 - 18 = 37$  es una sustracción con números hasta 100.

**Inversos aditivos.** Dos números cuya sumatoria sea igual a 0 son inversos aditivos entre sí. Ejemplo:  $3/4$  y  $-3/4$  son inversos aditivos entre sí, porque  $3/4 + (-3/4) = (-3/4) + 3/4 = 0$ .

**Propiedad asociativa de la adición.** Consulten la tabla 3 en este glosario.

**Propiedad asociativa de la multiplicación.** Consulten la tabla 3 en este glosario.

**Datos con dos variables.** Anotaciones con pares de números asociados. Ejemplo: una lista de tallas y pesos para cada jugador de un equipo de fútbol.

**Diagrama de caja.** Es un método para presentar una distribución de valores de datos utilizando los valores de medianas, cuartiles, y de los extremos (valores atípicos) de un conjunto de datos. Un diagrama de caja muestra el 50% de los datos.<sup>25</sup>

**Propiedad conmutativa.** Consulten la tabla 3 en este glosario.

**Fracción compleja.** Una fracción  $A/B$  en la que  $A$  y/o  $B$  son fracciones (con  $B$  diferente a cero).

**Algoritmo de computación.** Un conjunto de pasos predefinidos pertinente a un tipo específico de problemas, que da el resultado correcto en cada caso cuando el procedimiento se sigue de manera correcta. Consulten también: *Estrategia de computación*.

**Estrategia de computación.** Manejos útiles que se pueden elegir para problemas específicos, pueden no tener un orden fijo y pueden estar orientados al replanteamiento de un problema. *Consulten también:* algoritmo de computación.

**Congruente.** Dos planos o figuras tridimensionales son congruentes, si una de ellas se puede obtener de otra mediante un movimiento rígido (una secuencia de movimientos de rotación, de simetría axial y de traslaciones).

**Método deductivo.** Una estrategia diseñada para encontrar el número de elementos integrantes de un grupo, sin tener que contar cada miembro del grupo. Por ejemplo, si se sabe que una pila de libros tiene 8 unidades y se agregan tres encima, no es necesario contar el grupo de nuevo; se puede averiguar el total mediante el *conteo a partir de un número dado* que sería en este caso, señalar la cima de la pila y recordar que hasta allí hay "ocho" unidades, continuando el conteo a partir de allí con "nueve, diez y once". "Ahora hay once libros".

**Diagrama de puntos.** *Consulte:* Representación gráfica.

**Dilatación.** Una transformación que mueve cada punto a lo largo de semirrectas a través del punto que sale de un centro fijo, y multiplica las distancias desde el centro por un factor de escala común.

**Forma desarrollada.** Un número con muchos dígitos se expresa de una forma desarrollada cuando se replantea como una suma de dígitos simples múltiplos de potencias de diez. Por ejemplo,  $643 = 600 + 40 + 3$ .

**Valor esperado.** Para una variable aleatoria es el promedio ponderado de todos los valores que puede tomar, con estimados obtenidos a partir de sus propias probabilidades.

**Primer cuartil.** Para un conjunto de datos con mediana  $M$ , el primer cuartil es igual a la mediana de los valores de los datos menores de  $M$ . Para el conjunto de datos,  $\{1, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 120\}$ , el primer cuartil es 6.<sup>26</sup> *Consulten también:* mediana, tercer cuartil, rango intercuartil.

<sup>25</sup> Adaptado del documento Wisconsin Department of Public Instruction, <http://dpi.wi.gov/standards/mathglos.html>, consultado el 2 de marzo de 2010.

<sup>26</sup> Existen muchos métodos diferentes para calcular cuartiles. El método que se explica aquí es conocido también como método de Moore y McCabe. Consulten el trabajo, Langford, E., "Quartiles in Elementary Statistics," (Cuartiles en la estadística básica) *Journal of Statistics Education* Volume 14, Number 3 (2006).

**Fracción.** Un número que responda a la forma  $a/b$ , donde  $a$  es un número entero y  $b$  es un número entero positivo. (La palabra *fracción* en estos estándares se refiere siempre a un número no negativo). *Consulten también:* número racional.

**Propiedad de identidad del 0.** Consulten la tabla 3 en este glosario.

**Modelos de probabilidad combinados de manera independiente.** Se dice que dos modelos de probabilidad se combinan de manera independiente si la probabilidad de cada par ordenado en el modelo combinado, es igual al producto de las probabilidades iniciales de los dos resultados individuales en el par ordenado.

**Entero.** Un número que responda a la forma  $a$  ó  $-a$ , para un número entero determinado  $a$ .

**Rango intercuartil.** Como medida de la variación en un conjunto de datos numéricos, el rango intercuartil es la distancia entre el primero y tercer cuartiles de ese conjunto. Ejemplo: Para el conjunto de datos, {1, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 120}, el rango de intercuartil es,  $15 - 6 = 9$ . *Consulten también:* primer cuartil y tercer cuartil.

**Representación gráfica.** Un método de presentación visual de una distribución de datos numéricos, en los que el valor del dato se muestra como un punto o señal trazado sobre una recta numérica. Se conoce también como diagrama de puntos.<sup>27</sup>

**Media.** Una medida de tendencia central en un conjunto de datos numéricos, que se calcula mediante la suma de los valores registrados en una lista y luego, se divide por la cantidad de valores en la lista.<sup>28</sup> Ejemplo: Para el conjunto de datos, {1, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 120}, el promedio es 21.

**Desviación media absoluta.** Una medida de la variación en un conjunto de datos numéricos, que se calcula mediante la adición de las distancias que existen entre el valor de cada dato, y luego se divide por la cantidad de datos. Ejemplo: Para el conjunto de datos, {2, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 120}, la desviación media absoluta es 20.

**Mediana.** Una medida de tendencia central en un conjunto de datos numéricos. La mediana de una lista de valores es el valor que se sitúa en el centro de una versión ordenada de la lista; o de otra manera, es el promedio de dos valores centrales si la lista contiene un número par de valores. Ejemplo: Para el conjunto de datos, {2, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 90}, la mediana es 11.

**Línea media.** En el gráfico de una función trigonométrica, es la línea horizontal en el punto medio entre sus valores máximo y mínimo.

**Multiplicación y división hasta el número 100.** La multiplicación o división de dos números enteros con respuestas dadas en términos de números enteros, y con el producto o el dividendo dentro del rango de 0 a 100. Ejemplo:  $72 \div 8 = 9$ .

**Inversos multiplicativos.** Dos números cuyo producto sea igual a 1 son inversos multiplicativos entre sí. Ejemplo:  $\frac{3}{4}$  y  $\frac{4}{3}$  son inversos multiplicativos entre sí porque  $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = 1$ .

**Diagrama de recta numérica.** Se trata de un diagrama sobre una recta numérica, que se utiliza par representar números y dar soporte a las conclusiones que se obtenga de ellos. En un diagrama de recta numérica para medir magnitudes, el intervalo de 0 a 1 representa la unidad básica de medida para determinar cualquier cantidad.

**Índice de variación porcentual.** Se trata de una tasa de variación expresada en términos de porcentaje. Ejemplo: si una población crece de 50 a 55 elementos por año, su crecimiento anual será  $\frac{5}{50} = 10\%$  al año.

**Distribución de probabilidad.** El conjunto de todos los valores posibles de una variable aleatoria, con un valor de probabilidad asignado a cada uno.

**Propiedades de las operaciones.** Consulten la tabla 3 en este glosario.

**Propiedades de la igualdad.** Consulten la tabla 4 en este glosario.

**Propiedades de la desigualdad.** Consulten la tabla 5 en este glosario.

<sup>27</sup> Adaptado del documento Wisconsin Department of Public Instruction, *op. cit.*

<sup>28</sup> Para ser más precisos, esta relación define el *promedio aritmético*.

**Propiedades de las operaciones.** Consulten la tabla 3 en este glosario.

**Probabilidad.** Se trata de un número entre 0 y 10 que se utiliza, para cuantificar la probabilidad de suceso de un evento cualquiera cuya frecuencia de ocurrencia es incierta (como lanzar una moneda al aire, la posibilidad de seleccionar entre un grupo a una misma persona en un proceso aleatorio, lanzar una pelota a un punto específico, comprobar la frecuencia de una condición médica).

**Modelo de probabilidad.** Un modelo de probabilidad se utiliza para asignar probabilidades a los resultados de un proceso estocástico, mediante el análisis de la naturaleza del proceso. El conjunto de todos los resultados se conoce como espacio muestral y sus probabilidades deben sumar 1. *Consulten también:* Modelo de probabilidad uniforme.

**Variable aleatoria.** Es la asignación de un valor numérico a cada resultado presente en un espacio muestral.

**Expresión racional.** Es el cociente de dos polinomios con denominador diferente a cero.

**Número racional.** Un número que responda a la forma  $a/b$  ó  $-a/b$  para cualquier fracción  $a/b$ . Los números enteros son números racionales.

**Figura rectilínea.** Un polígono que tiene todos su ángulos rectos.

**Movimiento rígido.** Un cambio de puntos en el espacio, que resulta de una secuencia de una o más acciones de traslación, simetría axial y/o rotaciones. En este documento se asume el objetivo de los movimientos rígidos, para la conservación de las medidas de distancias y ángulos.

**Decimal periódico.** Es la forma decimal de un número racional. *Consulten también:* decimal finito.

**Espacio muestral.** En un modelo de probabilidad de un proceso aleatorio, es la relación de los resultados individuales que se va a analizar.

**Diagrama de dispersión.** Se trata de un gráfico en un plano de coordenadas, que representa un conjunto de datos con dos variables. Por ejemplo, las medidas de altura y peso de un grupo de personas, presentado en un diagrama de dispersión.<sup>29</sup>

**Transformaciones de semejanza.** Se trata de un movimiento rígido seguido por una dilatación.

**Diagrama de cinta** Un gráfico que muestra un segmento de cinta para ilustrar las relaciones ente los números. También se conoce como histograma, gráfico de barras, diagrama de cinta o gráficos de longitud.

**Decimal finito.** Un número decimal recibe el nombre de finito cuando el dígito que se repita es 0.

**Tercer cuartil.** Para un conjunto de datos con mediana  $M$ , el tercer cuartil es igual a la mediana de los valores de los datos mayores de  $M$ . Para el conjunto de datos, {2, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 120}, el tercer cuartil is 15. *Consulten también:* mediana, primer cuartil, rango intercuartil.

**Trapezoide:** Es un cuadrilátero que tiene al menos un par de lados paralelos.

**Propiedad de transitividad en la medición indirecta.** Si la longitud de un objeto A es mayor que la de un objeto B, y la longitud del objeto B es mayor que la del objeto C, entonces la longitud del objeto A es mayor que la del objeto B. Este principio afecta también las medidas de otras cantidades.

**Modelo de probabilidad uniforme.** Es un modelo de probabilidad que asigna igual probabilidad de ocurrencia, a todos los resultados posibles de un evento. *Consultar también:* Modelo de probabilidad.

**Vector.** Se trata de una cantidad con magnitud y dirección ubicada en el plano o en el espacio, definida por un par o terna ordenados de números reales.

**Modelo visual de fracción.** Se refiere a diagramas de cinta, diagramas de recta numérica o, modelos de área.

**Números enteros.** Los números 0, 1, 2, 3, ...

<sup>29</sup> Adaptado del documento Wisconsin Department of Public Instruction, *op. cit.*

TABLA 1. Casos comunes de adición y sustracción.<sup>30</sup>

	Resultado desconocido	Cambio desconocido	Inicio desconocido
<b>Agregar a</b>	Dos conejos están sentados en la grama. Tres conejos más saltan por allí. ¿Cuántos conejos se encuentran en la grama en este momento? $2 + 3 = ?$	Dos conejos estaban sentados en la grama. Algunos más saltaban por allí. Habían entonces cinco conejos. ¿Cuántos conejos saltaban al lado de los otros dos? $2 + ? = 5$	Varios conejos estaban sentados en la grama. Tres conejos más saltan por allí. Habían entonces cinco conejos. ¿Cuántos conejos se encontraban antes en la grama? $? + 3 = 5$
<b>Reducir</b>	Había en la mesa cinco manzanas. Me comí dos. ¿Cuántas manzanas hay ahora en la mesa? $5 - 2 = ?$	Había en la mesa cinco manzanas. Me comí algunas de ellas. Y entonces quedaron tres manzanas. ¿Cuántas manzanas me comí? $5 - ? = 3$	En la mesa había algunas manzanas. Me comí dos. Y entonces quedaron tres manzanas. ¿Cuántas manzanas había antes en la mesa? $? - 2 = 3$
	Total desconocido	Sumando desconocido	Juntos sumandos desconocidos <sup>1</sup>
<b>Juntar/ Agrupar<sup>2</sup></b>	En la mesa hay tres manzanas rojas y dos manzanas verdes. ¿Cuántas manzanas hay en la mesa? $3 + 2 = ?$	En la mesa hay cinco manzanas. Tres son rojas y las demás verdes. ¿Cuántas manzanas hay de color verde? $3 + ? = 5, 5 - 3 = ?$	Mi abuela tiene cinco flores. ¿Cuántas puede colocar en su florero rojo y cuántas en el azul? $5 = 0 + 5, 5 = 5 + 0$ $5 = 1 + 4, 5 = 4 + 1$ $5 = 2 + 3, 5 = 3 + 2$
	Diferencia desconocida	Mayor desconocida	Menor desconocida
<b>Comparen<sup>3</sup></b>	(Versión "¿Cuántos/as más?): Lucy tiene dos manzanas. Julie tiene cinco manzanas. ¿Cuántas manzanas más tiene Julie que Lucy?  (Versión "¿Cuántos/as menos?): Lucy tiene dos manzanas. Julie tiene cinco manzanas. ¿Cuántas manzanas menos tiene Julie que Lucy? $2 + ? = 5, 5 - 2 = ?$	(Versión con "Más"): Julie tiene tres manzanas más que Lucy. Lucy tiene dos manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene Julie?  (Versión con "Menos"): Lucy tiene 3 manzanas menos que Julie. Lucy tiene dos manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene Julie? $2 + 3 = ?, 3 + 2 = ?$	(Versión con "Más"): Julie tiene tres manzanas más que Lucy. Julie tiene cinco manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene Julie?  (Versión con "Menos"): Lucy tiene 3 manzanas menos que Julie. Julie tiene cinco manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene Julie? $5 - 3 = ?, ? + 3 = 5$

<sup>1</sup>Estas situaciones de agrupación pueden ser utilizadas, para demostrar todas las posibles descomposiciones que puede sufrir un número dado. Las ecuaciones relacionadas anteriormente, que muestran el total del lado izquierdo del signo igual,

ayudan a los niños a comprender que el signo "=" no siempre indica "la misma operación", pero sí indica siempre "la misma cantidad que".

<sup>2</sup>Cualquiera de los sumandos puede ser desconocido, por lo que hay tres variaciones en el contexto de este tipo de problemas. Una situación en la que Ambos Sumandos se Desconocen representa una variación de esta situación elemental,

especialmente en casos con números pequeños iguales o menores de 10.

<sup>3</sup>Para casos en que las Cantidades Desconocidas sean las Mayores o las Menores, una de las variaciones es la que señala la operación correcta (la versión que utiliza "más" para la cantidad mayor desconocida y "menos"

para la cantidad desconocida más pequeña). Las otras variaciones presentan mayor complejidad.

<sup>30</sup> Adaptado del libro, Box 2-4 of Mathematics Learning in Early Childhood (Marco 2-4 del aprendizaje de las matemáticas en la primera infancia), National Research Council (2009, pags. 32, 33)

TABLA 2. Casos comunes de multiplicación y división.<sup>31</sup>

	Producto desconocido	Tamaño de grupo desconocido ("¿Cuántos hay en cada grupo?" División)	Cantidad de grupos desconocida ("¿Cuántos grupos?" División)
	$3 \times 6 = ?$	$3 \times ? = 18$ y $18 \div 3 = ?$	$? \times 6 = 18$ y $18 \div 6 = ?$
<b>Grupos iguales</b>	Hay 3 bolsas con 6 ciruelas en cada una de ellas. ¿Cuántas ciruelas hay en total? <i>Ejemplo de medición.</i> Necesitamos 3 unidades de cadena de 6 pulgadas de largo cada una. ¿Cuánta cadena necesitaremos en total?	Si 18 ciruelas se dividen por igual en tres bolsas, ¿cuántas ciruelas habrán en cada bolsa? <i>Ejemplo de medición.</i> Tenemos 18 pulgadas de cadena que cortaremos en tres piezas iguales. ¿Qué largo tendrá cada pieza?	Si debemos empaquetar 18 ciruelas en bolsas con 6 unidades cada una, ¿cuántas bolsas necesitaremos? <i>Ejemplo de medición.</i> Tenemos 18 pulgadas de cadena que cortaremos en piezas de 6 pulgadas cada una. ¿Cuántas piezas de cadena tendremos?
<b>Series,<sup>4</sup> Área<sup>5</sup></b>	Hay 3 filas de manzanas con 6 manzanas en cada fila. ¿Cuántas manzanas hay en total? <i>Ejemplo de área.</i> ¿Cuál es el área de un rectángulo que mide 3 cm x 6 cm?	Si colocamos 18 manzanas en 3 filas iguales, ¿cuántas manzanas habrá en cada fila? <i>Ejemplo de área.</i> Un rectángulo tiene un área de 18 centímetros cuadrados. Si uno de sus lados mide 3 cm de largo, ¿cuánto mide el lado que queda junto a él?	Si 18 manzanas se colocan en filas iguales de 6 manzanas cada una, ¿cuántas filas habrá? <i>Ejemplo de área.</i> Un rectángulo tiene un área de 18 centímetros cuadrados. Si uno de sus lados mide 6 cm de largo, ¿cuánto mide el lado que queda junto a él?
<b>Comparen</b>	Un sombrero azul cuesta \$6. Uno rojo cuesta tres veces más que el azul. ¿Cuánto cuesta el sombrero rojo? <i>Ejemplo de medición.</i> Una cinta de caucho mide 6 cm de largo. ¿Qué longitud tendrá la cinta de caucho cuando se estire 3 veces más de su tamaño actual?	Un sombrero rojo cuesta \$18 y es 3 veces más caro que el sombrero azul. ¿Cuánto cuesta el sombrero azul? <i>Ejemplo de medición.</i> Una cinta de caucho se estira hasta que mide 18 cm de largo, que representa 3 veces más de su longitud inicial. ¿Qué longitud tenía inicialmente la cinta de caucho?	Un sombrero rojo cuesta \$18 y uno azul \$6. ¿Cuántas veces más es el costo del sombrero rojo comparado con el azul? <i>Ejemplo de medición.</i> Una cinta de caucho mide inicialmente 6 cm de largo. Luego se estiró hasta alcanzar una longitud de 18 cm. ¿Cuántas veces más es la longitud actual de la cinta de caucho?
<b>General</b>	$a \times b = ?$	$a \times ? = p$ , y $p \div a = ?$	$? \times b = p$ , y $p \div b = ?$

<sup>4</sup>La forma de escritura de la serie de ejemplos muestra la forma más sencilla de presentar los problemas. Una forma más complicada es utilizar los términos filas y columnas: Las manzanas en la vitrina de la tienda se muestran en 3 filas y 6 columnas. ¿Cuántas manzanas hay allí? Ambas formas tienen su ventaja.

<sup>5</sup>El área incluye series de cuadrados secuenciales que han sido colocados juntos de tal forma que no queden espacios entre ellos ni se superpongan, así que los problemas de series contemplan estas situaciones de medidas particularmente importantes.

<sup>31</sup> Los primeros ejemplos en cada celda, lo son de elementos discretos. Estos casos son más sencillos para los estudiantes, por lo que deben ser mostrados antes que los ejemplos sobre mediciones.



**TABLA 3.** Las propiedades de las operaciones. Aquí,  $a$ ,  $b$  y  $c$  representan números arbitrarios en un sistema numérico dado. Las propiedades de las operaciones aplican a los sistemas de números racionales, de números reales y de números complejos.

<i>Propiedad asociativa de la adición.</i>	$(a + b) + c = a + (b + c)$
<i>Propiedad conmutativa de la adición</i>	$a + b = b + a$
<i>Propiedad de identidad aditiva del 0.</i>	$a + 0 = 0 + a = a$
<i>Existencia de inversos aditivos.</i>	Para cada $a$ existe $-a$ de tal forma que $a + (-a) = (-a) + a = 0$ .
<i>Propiedad asociativa de la multiplicación.</i>	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
<i>Propiedad conmutativa de la multiplicación.</i>	$a \times b = b \times a$
<i>Propiedad de identidad multiplicativa del 1.</i>	$a \times 1 = 1 \times a = a$
<i>Existencia de inversos multiplicativos.</i>	Para cada $a \neq 0$ existe $1/a$ , de tal forma que $a \times 1/a = 1/a \times a = 1$ .
<i>Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición.</i>	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

**TABLA 4.** Las propiedades de la igualdad. Aquí,  $a$ ,  $b$  y  $c$  representan números arbitrarios en los sistemas de números racionales, reales o complejos.

<i>Propiedad reflexiva de la igualdad.</i>	$a = a$
<i>Propiedad simétrica de la igualdad.</i>	Si $a = b$ , entonces $b = a$ .
<i>Propiedad transitiva de la igualdad.</i>	Si $a = b$ y $b = c$ , entonces $a = c$ .
<i>Propiedad aditiva de la igualdad.</i>	Si $a = b$ , entonces $a + c = b + c$ .
<i>Propiedad sustractiva de la igualdad.</i>	Si $a = b$ , entonces $a - c = b - c$ .
<i>Propiedad multiplicativa de la igualdad.</i>	Si $a = b$ , entonces $a \times c = b \times c$ .
<i>Propiedad divisoria de la igualdad.</i>	Si $a = b$ y $c \neq 0$ , entonces $a \div c = b \div c$ .
<i>Propiedad sustitutiva de la igualdad.</i>	Si $a = b$ , entonces $b$ puede ser sustituida por $a$ en cualquier expresión que contenga $a$ .

**TABLA 5.** Propiedades de la desigualdad. Aquí,  $a$ ,  $b$  y  $c$  representan números arbitrarios en los sistemas de números racionales o reales.

Solamente una de las siguientes relaciones es verdadera: $a < b$ , $a = b$ , $a > b$ .
Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$ .
Si $a > b$ , entonces $b < a$ .
Si $a > b$ , entonces $-a < -b$ .
Si $a > b$ , entonces $a \pm c > b \pm c$ .
Si $a > b$ y $c > 0$ , entonces $a \times c > b \times c$ .
Si $a > b$ y $c < 0$ , entonces $a \times c < b \times c$ .
Si $a > b$ y $c > 0$ , entonces $a \div c > b \div c$ .
Si $a > b$ y $c < 0$ , entonces $a \div c < b \div c$ .